Industriell reglerteknik

Föreläsning 9c: Modellbaserad prediktionsreglering – utvidgningar

Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

LINKÖPING UNIVERSITY

MPC

Minimeringsproblem i MPC:

$$\boxed{\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

En fördel med MPC är dess flexibilitet, vilken gör att metoden kan anpassas till olika typer av reglerproblem. Här: Några exempel på detta.

Referensföljning

Modifiera målfunktionen till:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j) - r(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

$r(k)$: aktuellt värde på referenssignalen

$r(k+j)$, $j = 1, \ldots, N-1$: framtida (!) värden på referenssignalen

Referensföljning...

Låt

$$R = \begin{pmatrix} r(k) \\ r(k+1) \\ \vdots \\ r(k+N-1) \end{pmatrix}$$

och $Z = \mathcal{M}X$. Den modifierade målfunktionen kan nu skrivas

$$\begin{aligned} &(Z-R)^T \mathcal{Q}_1 (Z-R) + U^T \mathcal{Q}_2 U \\ &= (\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) - R)^T \mathcal{Q}_1 (\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) - R) + U^T \mathcal{Q}_2 U \end{aligned}$$

Jämfört med standardfallet har vi nu $\mathcal{M}\mathcal{F}x(k) - R$ istället för $\mathcal{M}\mathcal{F}x(k)$. Referensföljning fås om man gör detta byte i QP-problemet.

Integralverkan

Med en referenssignal: Olämpligt att straffa storleken på styrsignalen i målfunktionen eftersom det kan krävas ett $u \neq 0$ för att få $z = r$.

Alternativ: Straffa ändringar i styrsignalen istället genom att modifiera målfunktionen till:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j) - r(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j) - u(k+j-1)\|_{Q_3}^2}$$

Integralverkan...

Inför notationen

$$\begin{pmatrix} u(k)-u(k-1) \\ u(k+1)-u(k) \\ \vdots \\ u(k+N-1)-u(k+N-2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & & & \\ -I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I & I \end{pmatrix}}_{=:\Omega} U - \underbrace{\begin{pmatrix} u(k-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\delta}$$

$$= \Omega U - \delta$$

Målfunktionen kan nu skrivas

$$(\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k)+\mathcal{G}U)-R)^T\mathcal{Q}_1(\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k)+\mathcal{G}U)-R)+(\Omega U-\delta)^T\mathcal{Q}_3(\Omega U-\delta)$$

och ger också ett QP-problem. Regulatorn blir nu dynamisk på grund av beroendet på $u(k-1)$.

Generella bivillkor

Antag att man vill se till att den styrda signalen z uppfyller vissa bivillkor, t.ex.:

$$z(k+j) \leq z_{max}$$

Med notationen $Z = \mathcal{M}X = \mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)$ får man

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) \leq \begin{pmatrix} z_{max} \\ \vdots \\ z_{max} \end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$\underbrace{\mathcal{M}\mathcal{G}}_{=:A_z} U \leq \underbrace{\begin{pmatrix} z_{max} \\ \vdots \\ z_{max} \end{pmatrix} - \mathcal{M}\mathcal{F}x(k)}_{=:b_z}$$

Generella bivillkor...

Bivillkor både på insignalen och på z fås med

$$\begin{bmatrix} A_u \\ A_z \end{bmatrix} U \leq \begin{bmatrix} b_u \\ b_z \end{bmatrix}$$

Alla bivillkor som är linjära i U kan inkluderas i MPC-problemet!

Exempel: Generella bivillkor

Antag att vi har ett system med två tillståndsvariabler och att vi vill kunna garantera att skillnaden mellan dem inte blir större än ett.

Kravet är $|x_1 - x_2| \leq 1$, vilket också kan skrivas som $\tilde{z} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där

$$\tilde{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\tilde{M}} x$$

Med vektornotation $\tilde{Z} = \tilde{\mathcal{M}} X = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)$ kan vi nu skriva bivillkoret som

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.v.s. som} \quad \underbrace{\tilde{\mathcal{M}}\mathcal{G}}_{=:\tilde{A}} U \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \tilde{\mathcal{M}}\mathcal{F}x(k)}_{=:\tilde{b}}$$

Sammanfattning

- MPC-utvidgningar:
    - Referensföljning
    - Integralverkan
    - Generella bivillkor
- Många andra modifieringar av MPC-problemet är också möjliga (men resulterar ofta i andra optimeringsproblem än QP-problem)

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY