Industriell reglerteknik: Föreläsning 9

Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

LINKÖPING UNIVERSITY

Föreläsningar

1	Sekvensstyrning: Funktionsdiagram, Grafcet.
2	Grundläggande reglerteori i diskret tid.
3	Modellering. Design av regulatorer.
4	Framkoppling från referenssignal. PID-regulatorn.
5	PID-regulatorn. Implementering av regulatorer.
6	Regulatorer i drift. Olinjära regulatorer.
7	Regulatorstrukturer.
8	Regulatorstrukturer. MPC: Grundprincip, problemformulering.
9●	MPC: Problemformulering, referensföljning, I-verkan.
10	MPC: Stabilitet.
11	Gästföreläsning
12	MPC: Tolkningar. Sammanfattning.

Modellbaserad prediktionsreglering – MPC (forts.)

MPC

Minimeringsproblem i MPC:

$$\boxed{\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

$u(k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ ändligt antal fria variabler (styrsignalsekvensen)

N = prediktionshorisont (designvariabel)

MPC-algoritm

MPC-algoritm:

1. Mät $x(k)$ (eller skatta med observatör utifrån mätningar av $y(k)$).
2. Räkna ut styrsignalssekvensen $u(k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. genom att lösa MPC-minimeringsproblemet .
3. Ställ ut första elementet $u(k)$ i styrsignalssekvensen.
4. Tidsuppdatering, $k := k+1$.
5. Repetera från steg 1.

Exempel: Styrbarhet

Betrakta MPC-reglering av ett system

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

där

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

och antag att man kan mäta båda tillstånden men att beräkningskomplexiteten gör att man bara kan använda den ena styrsignalen. Vilken styrsignal ska man välja?

Exempel: Styrbarhet…

Kontrollera styrbarheten! (MPC-regulatorn har, precis som andra regulatorer, ingen möjlighet att påverka icke styrbara moder i ett system)

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ har ej full rang} \quad \Rightarrow \quad \text{systemet ej styrbart med enbart } u_1$$

(Dessutom är det icke-styrbara tillståndet x_2 instabilt.)

$$\mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ har full rang} \quad \Rightarrow \quad \text{systemet är styrbart med enbart } u_2$$

Resultat: Man måste välja att använda u_2

Trimning av MPC-regulator

MPC-regulatorns egenskaper beror dels på modellen av systemet och dels på de designparametrar som man väljer i minimeringsproblemet:

$$\min_{u_{min} \le u \le u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2$$

- Matriserna Q_1 och Q_2 väljs ofta som diagonalmatriser
- Ökad snabbhet i regleringen fås genom att lägga större vikt på ett eller flera element i z *eller* genom att lägga mindre vikt på ett eller flera element i u (och vice versa för minskad snabbhet)
- Snabbheten begränsas dock av u_{min} och u_{max} (ofta givna av tillämpningen, men kan även ses som designparametrar)
- Det kan löna sig att justera vikterna individuellt för varje element i z och u (till exempel är det lite motsägelsefullt att samtidigt öka vikten på både position och hastighet om båda ingår i z...)

Kompakt beskrivning

Kompakt beskrivning av målfunktionen:

$$(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) + U^T \mathcal{Q}_2 U$$

MPC-minimeringsproblemet formulerat som ett kvadratiskt programmeringsproblem (QP-problem):

$$\min_U \frac{1}{2} U^T (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{G} + \mathcal{Q}_2) U + (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{F} x(k))^T U$$

bivillkor $A_u U \leq b_u$

Exempel: DC-motor

Betrakta en DC-motor som beskrivs av modellen $V(s) = G(s)U(s)$, där

$$G(s) = \frac{2}{s(s+8)},$$

$v(t)$ är motorns vinkelutslag och $u(t)$ är spänningen över motorn som är begränsad till intervallet $[-2, 2]$. Antag att vi kan mäta både $v(t)$ och $\dot{v}(t)$. Använd samplingstiden $T_S = 0.05\,$s och designa en MPC-regulator som styr vinkeln och vinkelhastigheten till noll från initialtillståndet $v(0) = 1$, $\dot{v}(0) = 2$.

Exempel: DC-motor...

Vi börjar med att skriva systemet på tillståndsform. Invers laplacetransformering av $V(s) = G(s)U(s)$ ger differentialekvationen $\ddot{v} + 8\dot{v} = 2u$ och med $x_1 = v$ och $x_2 = \dot{v}$ får vi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad \text{(båda tillstånden kan mätas)}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad \text{(vi vill kunna påverka både } v \text{ och } \dot{v} \text{ i målfunktionen)}$$

Det givna initialtillståndet är

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exempel: DC-motor...

Lösningsgång i Matlab:

1. Mata in tillståndsmodellen
2. Sampla tillståndsmodellen (med `c2d` (zoh) och den givna samplingstiden)
3. Mata in $x(0)$ (för att kunna simulera systemet)
4. Definiera MPC-problemet med hjälp av M, N, Q_1, Q_2 och gränser för styrsignalen u
5. Skapa en funktion som beräknar $u(k)$ från $x(k)$ genom att lösa MPC-problemet (till exempel med `quadprog` i Matlab)
6. Simulera det slutna systemet för olika val av Q_1 och Q_2 (och eventuellt N, M och gränserna för styrsignalen)

Referensföljning

Modifiera målfunktionen till:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j) - r(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

$r(k)$: aktuellt värde på referenssignalen

$r(k+j)$, $j = 1, \ldots, N-1$: framtida (!) värden på referenssignalen

Referensföljning. . .

Låt

$$R = \begin{pmatrix} r(k) \\ r(k+1) \\ \vdots \\ r(k+N-1) \end{pmatrix}$$

och $Z = \mathcal{M}X$. Den modifierade målfunktionen kan nu skrivas

$$\begin{aligned} &(Z-R)^T \mathcal{Q}_1 (Z-R) + U^T \mathcal{Q}_2 U \\ &= (\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) - R)^T \mathcal{Q}_1 (\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) - R) + U^T \mathcal{Q}_2 U \end{aligned}$$

Jämfört med standardfallet har vi nu $\mathcal{MF}x(k) - R$ istället för $\mathcal{MF}x(k)$. Referensföljning fås om man gör detta byte i QP-problemet.

Integralverkan

Med en referenssignal: Olämpligt att straffa storleken på styrsignalen i målfunktionen eftersom det kan krävas ett $u \neq 0$ för att få $z = r$.

Alternativ: Straffa ändringar i styrsignalen istället genom att modifiera målfunktionen till:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j) - r(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j) - u(k+j-1)\|_{Q_3}^2}$$

Integralverkan...

Inför notationen

$$\begin{pmatrix} u(k)-u(k-1) \\ u(k+1)-u(k) \\ \vdots \\ u(k+N-1)-u(k+N-2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & & & \\ -I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I & I \end{pmatrix}}_{=:\Omega} U - \underbrace{\begin{pmatrix} u(k-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\delta}$$

$$= \Omega U - \delta$$

Målfunktionen kan nu skrivas

$$(\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k)+\mathcal{G}U)-R)^T \mathcal{Q}_1 (\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k)+\mathcal{G}U)-R) + (\Omega U-\delta)^T \mathcal{Q}_3 (\Omega U-\delta)$$

och ger också ett QP-problem. Regulatorn blir nu dynamisk på grund av beroendet på $u(k-1)$.

Generella bivillkor

Antag att man vill se till att den styrda signalen z uppfyller vissa bivillkor, t.ex.:

$$z(k+j) \leq z_{max}$$

Med notationen $Z = \mathcal{M}X = \mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)$ får man

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) \leq \begin{pmatrix} z_{max} \\ \vdots \\ z_{max} \end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$\underbrace{\mathcal{M}\mathcal{G}}_{=:A_z} U \leq \underbrace{\begin{pmatrix} z_{max} \\ \vdots \\ z_{max} \end{pmatrix} - \mathcal{M}\mathcal{F}x(k)}_{=:b_z}$$

Generella bivillkor. . .

Bivillkor både på insignalen och på z fås med

$$\begin{bmatrix} A_u \\ A_z \end{bmatrix} U \leq \begin{bmatrix} b_u \\ b_z \end{bmatrix}$$

Alla bivillkor som är linjära i U kan inkluderas i MPC-problemet!

Exempel: Generella bivillkor

Antag att vi har ett system med två tillståndsvariabler och att vi vill kunna garantera att skillnaden mellan dem inte blir större än ett.

Kravet är $|x_1 - x_2| \leq 1$, vilket också kan skrivas som $\tilde{z} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ där

$$\tilde{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\tilde{M}} x$$

Med vektornotation $\tilde{Z} = \tilde{\mathcal{M}} X = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)$ kan vi nu skriva bivillkoret som

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.v.s. som} \quad \underbrace{\tilde{\mathcal{M}}\mathcal{G}}_{=:\tilde{A}} U \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \tilde{\mathcal{M}}\mathcal{F}x(k)}_{=:\tilde{b}}$$

Sammanfattning

Modellbaserad prediktionsreglering (MPC):

- MPC är en avancerad reglerstrategi med stor industriell relevans
- Idé: Ta fram en optimal (ändlig) styrsignalsekvens genom att prediktera systemets beteende. Använd första styrsignalelementet och gör om optimeringen i nästa sampelintervall.
- Formulering som QP-problem:

$$\min_{U} \frac{1}{2}U^T(\mathcal{G}^T\mathcal{M}^T\mathcal{Q}_1\mathcal{M}\mathcal{G}+\mathcal{Q}_2)U+(\mathcal{G}^T\mathcal{M}^T\mathcal{Q}_1\mathcal{M}\mathcal{F}x(k))^TU$$

bivillkor $A_uU \leq b_u$

- MPC-utvidgningar:
  - Referensföljning
  - Integralverkan
  - Generella bivillkor
- Många andra modifieringar av MPC-problemet är också möjliga (men resulterar ofta i andra optimeringsproblem än QP-problem)

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY