Industriell reglerteknik

Föreläsning 9a: Modellbaserad prediktionsreglering – problemformulering

Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

LINKÖPING UNIVERSITY

MPC

Minimeringsproblem i MPC:

$$\boxed{\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

$u(k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ ändligt antal fria variabler (styrsignalsekvensen)

N = prediktionshorisont (designvariabel)

MPC-algoritm

MPC-algoritm:

1. Mät $x(k)$ (eller skatta med observatör utifrån mätningar av $y(k)$).
2. Räkna ut styrsignalssekvensen $u(k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. genom att lösa MPC-minimeringsproblemet .
3. Ställ ut första elementet $u(k)$ i styrsignalssekvensen.
4. Tidsuppdatering, $k := k + 1$.
5. Repetera från steg 1.

Exempel: Styrbarhet

Betrakta MPC-reglering av ett system

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

där

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

och antag att man kan mäta båda tillstånden men att beräkningskomplexiteten gör att man bara kan använda den ena styrsignalen. Vilken styrsignal ska man välja?

Exempel: Styrbarhet…

Kontrollera styrbarheten! (MPC-regulatorn har, precis som andra regulatorer, ingen möjlighet att påverka icke styrbara moder i ett system)

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ har ej full rang} \quad \Rightarrow \quad \text{systemet ej styrbart med enbart } u_1$$

(Dessutom är det icke-styrbara tillståndet x_2 instabilt.)

$$\mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ har full rang} \quad \Rightarrow \quad \text{systemet är styrbart med enbart } u_2$$

Resultat: Man måste välja att använda u_2

Trimning av MPC-regulator

MPC-regulatorns egenskaper beror dels på modellen av systemet och dels på de designparametrar som man väljer i minimeringsproblemet:

$$\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2$$

- Matriserna Q_1 och Q_2 väljs ofta som diagonalmatriser
- Ökad snabbhet i regleringen fås genom att lägga större vikt på ett eller flera element i z *eller* genom att lägga mindre vikt på ett eller flera element i u (och vice versa för minskad snabbhet)
- Snabbheten begränsas dock av u_{min} och u_{max} (ofta givna av tillämpningen, men kan även ses som designparametrar)
- Det kan löna sig att justera vikterna individuellt för varje element i z och u (till exempel är det lite motsägelsefullt att samtidigt öka vikten på både position och hastighet om båda ingår i z...)

Kompakt beskrivning

Kompakt beskrivning av målfunktionen:

$$(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U)^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M}(\mathcal{F}x(k) + \mathcal{G}U) + U^T \mathcal{Q}_2 U$$

MPC-minimeringsproblemet formulerat som ett kvadratiskt programmeringsproblem (QP-problem):

$$\min_U \frac{1}{2} U^T (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{G} + \mathcal{Q}_2) U + (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{F} x(k))^T U$$

bivillkor $A_u U \leq b_u$

Sammanfattning

- MPC är en avancerad reglerstrategi med stor industriell relevans
- Idé: Ta fram en optimal (ändlig) styrsignalsekvens genom att prediktera systemets beteende. Använd första styrsignalelementet och gör om optimeringen i nästa sampelintervall.
- Formulering som QP-problem:

$$\min_{U} \frac{1}{2} U^T (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{G} + \mathcal{Q}_2) U + (\mathcal{G}^T \mathcal{M}^T \mathcal{Q}_1 \mathcal{M} \mathcal{F} x(k))^T U$$

bivillkor $A_u U \leq b_u$

www.liu.se

LINKÖPING
UNIVERSITY