Industriell reglerteknik

Föreläsning 8b: Modellbaserad prediktionsreglering – grundprincip

Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

MPC

Modellbaserad prediktionsreglering (eng. model predictive control, MPC):

- En avancerad reglerstrategi som fått stort genomslag i industrin under de senaste decennierna.
- Idé: Utnyttja prediktionskraften i processmodellen och optimera styrsignalen online.
- Kan ta hänsyn till bivillkor i det reglerade systemet (t.ex. begränsade styrsignaler, säkerhetsgränser).
- Hanterar enkelt flera in- och utsignaler.
- Intuitiv metod ($\Rightarrow$ enkel att förklara för operatörer).
- Dock: Beräkningskrävande (och en modell krävs).

Modell

Tillståndsmodell av ett system (antag $T_S = 1$):

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\
y(k) &= Cx(k) \\
z(k) &= Mx(k)
\end{aligned}
$$

$$
u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \qquad x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}
$$

$$
y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \qquad z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_{p_z}(k) \end{bmatrix}
$$

Här: $C = I$ oftast

Linjärkvadratisk reglering

Linjärkvadratisk reglering (LQR): Bestäm den styrsignal som löser minimeringsproblemet

$$\boxed{\min_u \sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_{Q_2}^2}$$

där $Q_1 \geq 0$ (positivt semidefinit) och $Q_2 > 0$ (positivt definit)

Notation: $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$

Resulterar i en optimal tillståndsåterkoppling: $u(k) = -Lx(k)$ (MATLAB-lösning: `L=dlqr(F,G,M'*Q1*M,Q2)`)

Exempel: DC-motor

Betrakta en DC-motor (t.ex. i en liten robotarm).

Modell av motorn:

$$z(t) = \frac{2}{5p^2 + p} u(t)$$

där $z(t)$ är motorns vinkelutslag och $u(t)$ är spänningen över motorn.

Antag att spänningen över motorn som mest kan vara $1\,\text{V}$ (dvs. att $|u| \leq 1$) och att samplingstiden är $T_S = 0.1\,\text{s}$.

Exempel: DC-motor...

Sampling (zoh) av en tillståndsmodell med $x = \begin{pmatrix} z & \dot{z} \end{pmatrix}^T$ ger det tidsdiskreta systemet:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0.09901 \\ 0 & 0.9802 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.001987 \\ 0.0396 \end{pmatrix} u(k) \\ z(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) \end{aligned}$$

Antag $x(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 \end{pmatrix}^T$

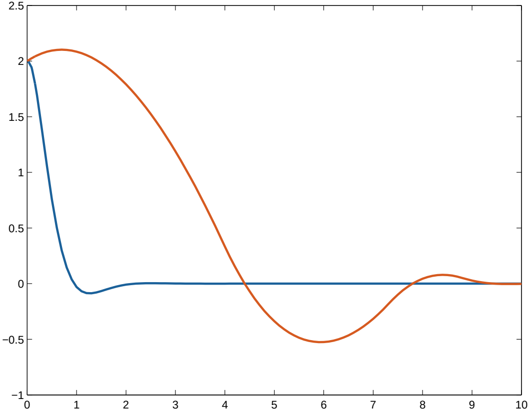
LQR: Lös minimeringsproblemet

$$\min_u \sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_{Q_2}^2$$

där $Q_1 = 1$ och $Q_2 = 0.001$.

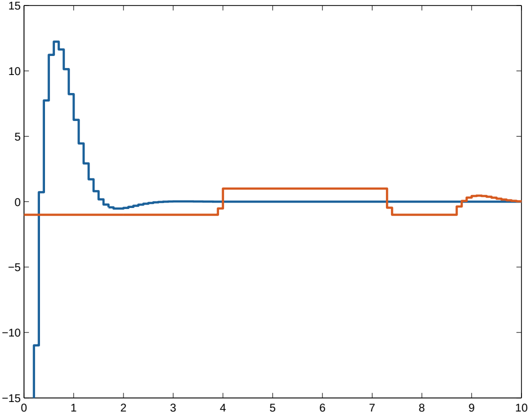
Exempel: DC-motor med LQR

Den styrda signalen $z(t)$ utan (blått) och med styrsignalmättning (rött):



Exempel: DC-motor med LQR...

Styrsignal utan (blått) och med styrsignalmättning (rött):



Exempel: Slutsats

Eftersom vi vet att $|u(k)| \leq 1$ borde vi ha använt kriteriet

$$\min_{|u| \leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_{Q_2}^2$$

för att bestämma u.

Svårt! (Oändligt många fria variabler, lösningen beror på $x(0)$)

Approximativ lösning: MPC (ändlig tidshorisont)

MPC

Minimeringsproblem i MPC:

$$\boxed{\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

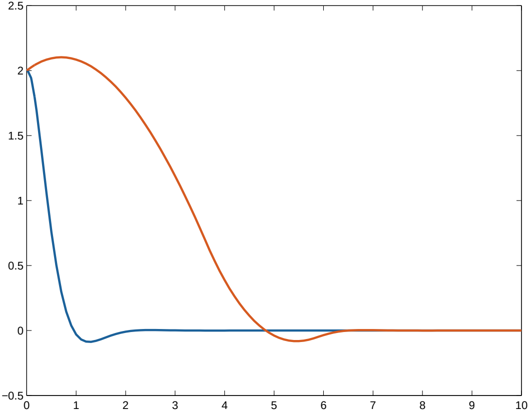
$u(k+j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ ändligt antal fria variabler (styrsignalsekvensen)

N = prediktionshorisont (designvariabel, väljs vanligen så att man täcker in ett typiskt insvängningsförlopp: $T_S N \approx$ insvängningstiden för det önskade slutna systemet)

Idé: Lös optimeringsproblemet online (under drift) i tidpunkten k. Ställ endast ut $u(k)$.

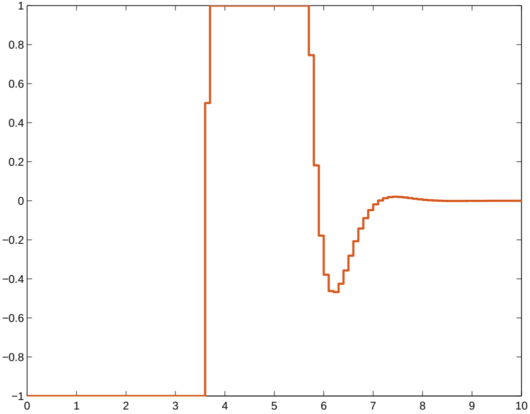
Exempel: DC-motor med MPC

Den styrda signalen $z(t)$ med LQR utan styrsignalmättning (blått) och med MPC (rött):



Exempel: DC-motor med MPC...

Styrsignal:



Sammanfattning

- MPC är en avancerad reglerstrategi med stor industriell relevans
- Idé: Ta fram en optimal (ändlig) styrsignalsekvens genom att prediktera systemets beteende. Använd första styrsignalelementet och gör om optimeringen i nästa sampelintervall.
- Minimeringsproblem i MPC:

$$\boxed{\min_{u_{min} \leq u \leq u_{max}} \sum_{j=0}^{N-1} \|z(k+j)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j)\|_{Q_2}^2}$$

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY