Industriell reglerteknik

Föreläsning 2: Tidsdiskret reglerteori

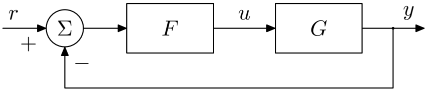
Martin Enqvist

Reglerteknik
Institutionen för systemteknik
Linköpings universitet

LINKÖPING UNIVERSITY

Repetition: Reglerteknik, grundkurs (1/4)

Konsten att få saker att uppföra sig som vi vill.



Utmaningar:

- Störningar
- Delvis okända systemegenskaper

Nyckelbegrepp:

- System och modell
- Insignal, utsignal, referenssignal, störning
- Återkoppling ↔ öppen styrning
- Stabilitet

Repetition: Reglerteknik, grundkurs (2/4)

PID-reglering: (de tre delarnas betydelse)

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^{t} e(\tau)\, d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

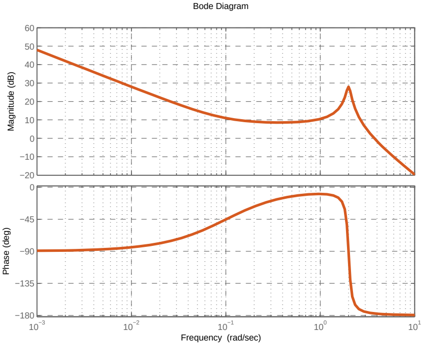
Verktyg:

- Överföringsfunktion, poler, nollställen
  (koppling poler $\leftrightarrow$ stegsvar)
- Blockschema (blockschemaräkning)
- Rotort, nyquistkriteriet (två analysmetoder)

Repetition: Reglerteknik, grundkurs (3/4)

Analys och design i frekvensdomänen:

- Bodediagram
  (en plott av $G(i\omega)$)
- Specifikationer på G_o
  (ω_c, φ_m, ω_p, A_m, $G_o(0)$) och på
  G_c (ω_B, M_p, $G_c(0)$)
- Kompensering m.h.a. bodediagram (lead-lag)
- Känslighet för störningar
- Robusthet mot modellfel



Repetition: Reglerteknik, grundkurs (4/4)

Tillståndsbeskrivningar och reglering:

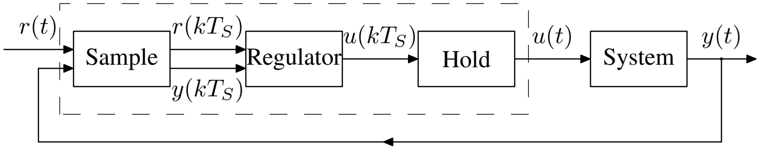
$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$
$$y = Cx \qquad u = -L\hat{x} + \tilde{r}$$

- Tillståndsbegreppet
- Stabilitet $\leftrightarrow$ egenvärdena till A-matrisen
- Styrbarhet, observerbarhet, minimal realisation
- Tillståndsåterkoppling, polplacering
- Rekonstruktion av tillstånd m.h.a. observatör, polplacering

Grundläggande reglerteori i diskret tid

Samplad reglering

Reglering baserad på (ekvidistant) sampling av mätsignalerna:



Fördelar med samplad reglering: enkelt att implementera godtyckliga funktioner (t.ex. tidsfördröjningar, olinjäriteter, logiska uttryck), billigare hårdvara, bättre flexibilitet

Nackdelar: fler parametrar att välja, kan försämra regleringen

Samplad reglering. . .

Tidsdiskreta regulatorer kan fås på två sätt:

I. Vid tidsdiskret reglerdesign baserad på en tidsdiskret systembeskrivning (kommer att diskuteras på föreläsningarna om MPC)

II. Vid en tidsdiskret implementering av en tidskontinuerlig regulator (kommer att diskuteras på fö 5)

Tidsdiskreta systembeskrivningar

Man behöver en tidsdiskret modell och tidsdiskreta reglertekniska analysverktyg då man

- direkt designar en tidsdiskret regulator (alt. I på föreg. bild)
- har gjort en tidsdiskret implementering av en tidskontinuerlig regulator (alt. II på föreg. bild) och den inte fungerar som väntat
- ska ta fram en robust allmän metod för tidsdiskret implementering av tidskontinuerliga regulatorer (som ska garantera att man aldrig hamnar i situationen i föreg. punkt)

Sampling av systembeskrivning

Sampling av en systembeskrivning innebär att man tar fram en tidsdiskret modell baserat på en tidskontinuerlig.

Antag att systemet är på tillståndsform:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (\Leftrightarrow \; G(s) = C(sI - A)^{-1}B)$$

och att insignalen är **styckvis konstant**, d.v.s. att $u(t) = u(kT_S)$, $kT_S \leq t < kT_S + T_S$. Lösningen till tillståndsekvationerna kan skrivas

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau$$

Sampling av systembeskrivning...

Resultat:

$$\begin{cases} x(kT_S + T_S) & = Fx(kT_S) + Gu(kT_S) \\ y(kT_S) & = Hx(kT_S) \end{cases}$$

där

$$F = e^{AT_S}, \quad G = \int_0^{T_S} e^{A\sigma} B \, d\sigma \quad \text{och} \quad H = C$$

(Detta är en exakt beskrivning av systemet i samplingsögonblicken.)

e^{AT_S} beräknas enklast m.h.a. sambandet

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

I Matlab: `ss`, `c2d`

Tidsdiskret till tidskontinuerligt?

Omvänt problem: Hitta A så att $e^{AT_S} = F$. Därefter kan B beräknas som

$$B = \left(\int_0^{T_S} e^{A\sigma}\, d\sigma \right)^{-1} G$$

Komplikationer:

- $e^{AT_S} = F$ kan sakna lösning.
- $e^{AT_S} = F$ kan ha flera lösningar.

Lösning

Ett tidsdiskret system på tillståndsform

$$\begin{aligned} x(kT_S + T_S) &= Fx(kT_S) + Gu(kT_S) \\ y(kT_S) &= Hx(kT_S) \end{aligned}$$

är sin egen lösningsalgoritm.

$$\begin{aligned} x(kT_S) &= Fx(kT_S - T_S) + Gu(kT_S - T_S) \\ &= F(Fx(kT_S - 2T_S) + Gu(kT_S - 2T_S)) + Gu(kT_S - T_S) \\ &= \dots \\ &= F^{(k-k_0)}x(k_0T_S) + \sum_{l=k_0}^{k-1} F^{(k-l-1)}Gu(lT_S) \end{aligned}$$

Styrbarhet

Definition: Ett system är *styrbart* om det för alla val av x^* finns en insignal som på ändlig tid tar systemet från $x(0) = 0$ till x^*.

(Samma definition som i kontinuerlig tid.)

Uttrycket på föregående sida ger:

$$x(NT_S) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{N-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(NT_S - T_S) \\ u(NT_S - 2T_S) \\ \vdots \\ u(T_S) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Styrbarhet...

Kriterium: Ett system med $\dim x = n$ är styrbart om och endast om

$$\boxed{\mathcal{S}(F,G) = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}}$$

har full rang.

OBS: Styrbarheten kan förloras vid sampling.

Observerbarhet

Definition: Ett system är *observerbart* om det för alla val av $x^* \neq 0$ gäller att utsignalen inte är identiskt lika med noll då $x(0) = x^*$ och $u(kT_S) = 0$.

(Samma definition som i kontinuerlig tid.)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T_S) \\ \vdots \\ y(NT_S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^N \end{bmatrix} x(0)$$

Observerbarhet. . .

Kriterium: Ett system med $\dim x = n$ är observerbart om och endast om

$$\boxed{\mathcal{O}(F,H) = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}$$

har full rang.

OBS: Observerbarheten kan förloras vid sampling.

Exempel

Systemet

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

är både styr- och observerbart eftersom

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pi & -\pi \end{pmatrix}$$

Exempel...

Sampling (zero order hold) med $T_S = 1$ ger

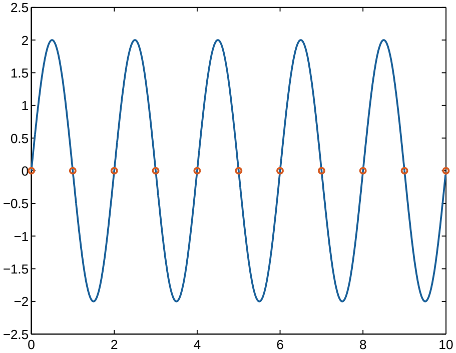
$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -2/\pi \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(k)$$

Det tidsdiskreta systemet är varken styr- eller observerbart eftersom

$$\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\pi & 2/\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

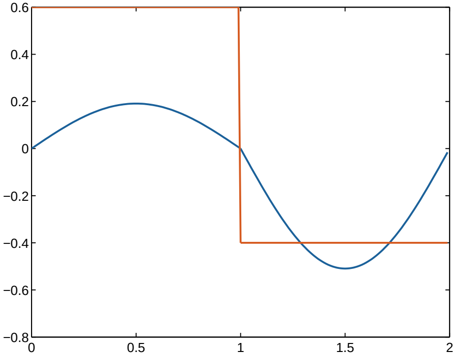
Exempel...

Utsignalen då $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ och $u(t) = 0$:



Exempel...

$x_2(t)$ (blå linje) då $x(0) = 0$ och insignalen (röd linje) är styckvis konstant:



Z-transformen

Den tidsdiskreta motsvarigheten till laplacetransformen är **z-transformen**:

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{y(kT_S)\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_S) z^{-k}}$$

($y(kT_S) = 0$ för $k < 0$)

Z-transformen...

Några egenskaper:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{ay(kT_S) + bv(kT_S)\} &= aY(z) + bV(z) \\
\mathcal{Z}\{y(kT_S - T_S)\} &= z^{-1}Y(z) + y(-T_S) \\
\mathcal{Z}\{y(kT_S + T_S)\} &= zY(z) - zy(0) \\
\mathcal{Z}\{\sum_{m=0}^{k} y(kT_S - mT_S)v(mT_S)\} &= Y(z)V(z)
\end{aligned}$$

Slutvärdesteoremet (om $y(kT_S)$ konvergerar):

$$\lim_{k\to\infty} y(kT_S) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)$$

Överföringsoperatorn

Med förskjutningsoperatorn, $qx(kT_S) = x(kT_S + T_S)$, kan

$$\begin{aligned} x(kT_S + T_S) &= Fx(kT_S) + Gu(kT_S) \\ y(kT_S) &= Hx(kT_S) \end{aligned}$$

skrivas

$$\begin{aligned} qx(kT_S) &= Fx(kT_S) + Gu(kT_S) \\ y(kT_S) &= Hx(kT_S) \end{aligned}$$

Detta ger

$$y(kT_S) = H(qI - F)^{-1}Gu(kT_S)$$

Överföringsoperatorn $G_{T_S}(q) = H(qI - F)^{-1}G$ eller **överföringsfunktionen** $G_{T_S}(z) = H(zI - F)^{-1}G$ (med $z \in \mathbb{C}$) ger en insignal-utsignal-beskrivning av systemet.

Överföringsoperatorn...

En allmän rationell överföringsoperator utan direktterm

$$G_{T_S}(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_1 q^{n-1} + \ldots + b_n}{q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_n}$$

svarar mot en **differensekvation** $y(kT_S) = \frac{B(q)}{A(q)} u(kT_S)$, d.v.s.

$$y((k+n)T_S) + \ldots + a_n y(kT_S) = b_1 u((k+n-1)T_S) + \ldots + b_n u(kT_S)$$

Alternativt skrivsätt: $G_{T_S}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{T_S}(m) q^{-m}$, där $g_{T_S}(m)$ är **impulssvaret (viktfunktionen)**.

I Matlab: `tf`, `impulse`

Poler

- Tidskontinuerligt system på minimal (styr- och observerbar) tillståndsform:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

  Systemets poler $=$ egenvärdena λ_i till matrisen A
- Motsvarande samplade system har, om det är minimalt, poler som ges av egenvärdena $e^{\lambda_i T_S}$ till matrisen $F = e^{AT_S}$.
- **Stabilitetsområdet** för ett tidsdiskret system är det inre av enhetscirkeln.

I Matlab: `pole`

Poler: Observationer

Antag att $\lambda = \mu + i\omega \Rightarrow e^{\lambda T_S} = e^{\mu T_S}(\cos(\omega T_S) + i\sin(\omega T_S))$

T_S litet $\Rightarrow$ poler nära $z = 1$

$\mu < 0 \Rightarrow |e^{\lambda T_S}| < 1$ (stabiliteten bevaras)

Nollställen

- Inget enkelt samband mellan det tidskontinuerliga och det tidsdiskreta systemets nollställen.
- Det samplade systemet kan få nollställen utanför enhetscirkeln även om det tidskontinuerliga systemet saknar nollställen i höger halvplan.

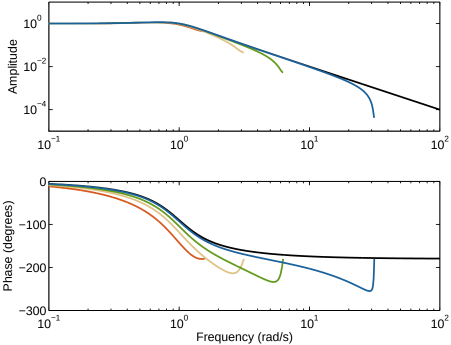
I Matlab: `zero`

Frekvensfunktionen

Frekvensfunktionen i kontinuerlig tid: $G(i\omega)$
Frekvensfunktionen i diskret tid: $G_{T_S}(e^{i\omega T_S})$

I Matlab: `bode`

Frekvensfunktioner för ett tidskontinuerligt system samt samplade system för $T_S = 2$s, $T_S = 1$s, $T_S = 0.5$s, $T_S = 0.1$s:



Rotort

En **rotort** beskriver hur polernas lägen ändras som funktion av någon parameter som påverkar systemet.

I Matlab: `rlocus`, `rlocfind`

Exempel: $G_{T_S}(q) = \dfrac{B(q)}{A(q)}$ regleras med en P-regulator $\Rightarrow$

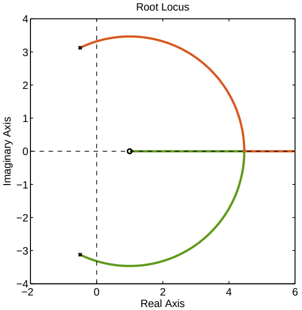
$$G_{ry}(q) = \frac{KB(q)}{A(q) + KB(q)}$$

- Undersök när $P(q) = A(q) + KB(q) = 0$ har rötter innanför enhetscirkeln.
- Stabilitetsgräns: Avgör när rötterna skär enhetscirkeln.

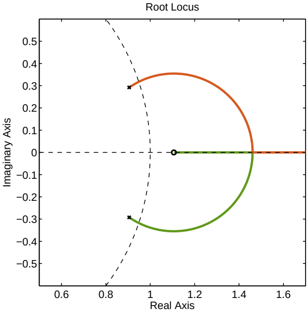
Exempel: Rotort

Rotort för P-reglering av

$$G(s) = \frac{-s+1}{s^2+s+10}$$



Rotort för P-reglering av motsvarande tidsdiskreta system ($T_S = 0.1$):



Nyquistkriteriet

Idé: Undersök hur $G_o(e^{i\omega T_S})$ (kretsförstärkningen) varierar när ωT_S genomlöper $0 \to 2\pi$.

Förenklat nyquistkriterium: Om $G_o(q)$ är stabil så är det återkopplade systemet $\frac{G_o(q)}{1+G_o(q)}$ stabilt om och endast om kurvan $G_o(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ inte omcirklar -1.

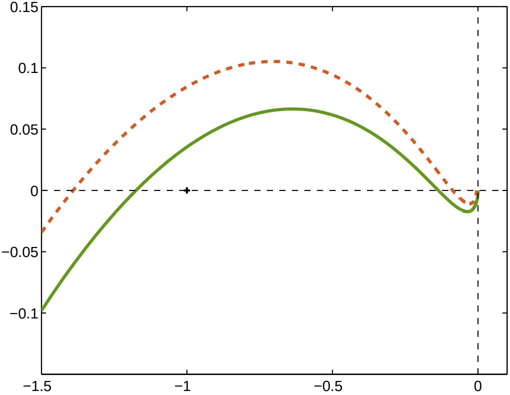
I Matlab: `nyquist`

Exempel: Nyquistkriteriet

Nyquistkurvan för systemet

$$G(s) = \frac{(s+2)^5}{10s(s+1)^5}$$

(**grönt, heldraget**) och motsvarande samplade system då $T_S = 0.1$ (**rött, streckat**).



Sammanfattning

- Exakt sampling av systembeskrivning (zero order hold)
- Styrbarhet och observerbarhet för tidsdiskreta system (OBS: Kan förloras vid sampling)
- Överföringsoperator/överföringsfunktion, poler, nollställen, frekvensfunktion för tidsdiskreta system
- Rotort, nyquistkriteriet för tidsdiskreta system

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY