Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT22 Reglerteknik

Tentamensdatum: 27 oktober 2023

1. (a) Överföringsfunktionen kan skrivas om på formen

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \frac{b/a}{s/a+1} = \frac{k}{sT+1}$$

där $k = b/a$ och $T = 1/a$. 63% av slutvärdet, d v s ca 2.5 nås efter ca 0.3 sek, vilket innebär att approximativt $T = 0.3$ och därmed $a = 3$. Stegets amplitud är 3 vilket gör att utsignalen går mot $3 \cdot k$, och enligt figuren ger detta $3 \cdot k = 4$ vilket ger att $k = 4/3$ vilket innebär $b = 4$.

Svar:

$$G(s) = \frac{4}{s+3}$$

(b) I fall A och C fås ett stationärt fel, d v s $e(t)$ går ej mot noll. Detta svarar mot kombinationerna utan I-del, d v s $K_I = 0$. Reglerfelet blir dock mindre för större värde på K_P vilket innebär att A hör samman med (ii) och C hör samman med (i). För fall B och D ger större I-del ett mera oscillativt system, vilket innebär att B hör samman med (iv) och D med (iii).

Svar: (i) - C, (ii) - A, (iii) - D, (iv) - B

(c) Blockschemat ger

$$E(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1+F(s)G(s)}V(s)$$

och med instättning av $F(s)$ och $G(s)$ fås

$$E(s) = \frac{(s+1)s}{s^2+s+K}R(s) - \frac{1}{s^2+s+K}V(s)$$

Det återkopplade systemet är stabilt och därför kan slutvärdessatsen användas, vilket ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+1)s}{s^2+s+K} \cdot \frac{5}{s} - \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2+s+K} \cdot \frac{10}{s} = 0 - \frac{10}{K}$$

Svar: Reglerfelet i stationärt tillstånd blir $-\frac{10}{K}$.

(d) **Svar:** Reglering av förbränningsprocesser för att minimera utsläpp av skadliga ämnen, reglering av processer för rening av avloppsvatten, medicintekniska system som t ex ventilatorer, etc.

2. (a) Stegsvar B och C oscillerar vilket svarar mot amplitudkurvorna I och III som har resonanstopp. Kurva C har större översläng vilket hör samman med III som har högst resonanstopp, och därmed hör B samman med I. Stegsvar A och D saknar översläng, och eftersom D är snabbare hör denna samman med II som har högre bandbredd, och därmed hör A samman med IV.

   Svar: A - IV, B - I, C - III, D - II

   (b) i Argumentet för det öppna systemet, d v s $G_O(i\omega) = KG(i\omega)$ passerar $-180°$ vid $\omega = 1$ rad/s, och där är absolutbeloppet, via avläsning i figuren, $\mid G_O(i\omega) \mid = K0.5$. För att det återkopplade systemet ska vara stabilt krävs därmed att $0.5K < 1$, d v s $K < 2$.

   ii För att erhålla fasmarginal 45° studerar vi när argumentkurvan passerar $-135°$ vilket sker vid $\omega = 0.4$ rad/s, och där är $\mid G_O(i\omega) \mid = 2$. För att skärfrekvensen ska bli 0.4 rad/s måste alltså K väljas så att $\mid G_O(i \cdot 0.4) \mid = 1$ d v s så att $K \cdot 2 = 1$, d v s $K = 0.5$.

   iii Bodediagramet visar att $G(s)$ innehåller en s-faktor i nämnaren, eftersom argumentkurvan börjar på $-90°$, vilket gör att $e_0 = 0$.

   iv Argumentkurvan för det öppna systemet passerar $-180°$ vid $\omega = 1$ rad/s och med $K = 0.5$ är $\mid G_O(i\omega) \mid = 0.25$ vid denna vinkelfrekvens, vilket ger att amplitudmarginalen är $1/0.25 = 4$.

   Svar: (i) - $K < 2$, (ii) - $K = 0.5$, (iii) - $e_0 = 0$. (iv) - $A_m = 4$.

3. (a) Med de angivna tillståndsvariaberna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}u(t) + \frac{1}{J}v(t)$$

På matrisform ger detta den angivna modellen.

(b) Med $J = 1$ fås att

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + \lambda l_2 + l_1 = 0$$

Den önskade polplaceringen i $-2 \pm 2i$ motsvarar den önskade karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

Jämförelse ger därmed $l_1 = 8$ och $l_2 = 4$.

Svar: Återkopplingen ges av

$$u(t) = -8x_1(t) - 4x_2(t) + r(t)$$

(c) Med $J \neq 1$ fås den karakteristiska ekvationen

$$\lambda^2 + \frac{4}{J}\lambda + \frac{8}{J} = 0$$

som har komplexa rötter för $J > 0.5$

Svar: Det återkopplade systemet har komplexa poler för $J > 0.5$.

(d) Genom att jämföra

$$\lambda^2 + \frac{4}{J}\lambda + \frac{8}{J} = 0$$

med

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_o\lambda + \omega_0^2 = 0$$

fås $\omega_0 = \sqrt{8/J}$ vilket ger

$$2\zeta\sqrt{\frac{8}{J}} = \frac{4}{J}$$

vilket ger

$$\zeta = \frac{2\sqrt{J}}{J\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{J}}$$

Svar: Det återkopplade systemets relativa dämpning som funktion av ζ ges av

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{J}}$$

Det återkopplade systemet blir mer oscillativt om armen har högre tröghetsmoment (tyngre) än vad som antagits, d v s då $J > 1$, eftersom den relativa dämpningen blir mindre. På motsvarande sätt blir det återkopplade systemet mindre oscillativt då $J < 1$.

4. (a) Med återkopplingen enligt uppgiften, $J = 1$ och $r(t) = 0$ ges det återkopplade systemet av

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bv(t) \quad \theta(t) = Cx(t)$$

d v s

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad \theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Överföringsfunktionen från v till θ ges av

$$G_V(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}B$$

vilket ger

$$G_V(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

När $v(t) = \sin 2t$ kommer $\theta(t)$ att bli sinusformad och dess amplitud blir $\mid G_V(i \cdot 2) \mid$. Detta ger

$$\mid G_V(i \cdot 2) \mid = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$$

Svar: Robotarmen kommer att svänga med amplituden 0.2.

(b) 1 Sant. När K ökar kommer en rot att gå mot slutpunkten, d v s -3 och en rot kommer att följa negativa realaxeln utmed asymptoten.

2 Går ej att avgöra utan att känna till $P(s)$. Det går inte att säga var rötterna startar, och därmed var dom kommer att vara för små värden på K utan att veta $P(s)$.

3 Sant. Med fyra rötter och en slutpunkt kommer det att finnas tre asymptoter, vara två går in i höger halvplan, vilket säger att två rötter kommer att gå över i höger halvplan för stora värden på K.

(c)
- Utsignal: Hastighet, position i sidled på vägen, ...
- Styrsignal: Kraft på pedalerna, styrets vinkel, kropens lutning
- Störsignaler: Motvind, backar, ...

5. (a) Det återkopplade systemets överföreingsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

och med insättning av

$$G(s) = \frac{1}{0.1s^2}$$

och

$$F(s) = K_P + K_D s$$

där $K_P = 10$ och $K_D = 1.5$ fås den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + 15s + 100 = 0$$

vilket ger polerna

$$s = -7.5 \pm 6.6i$$

Svar: Det återkopplade systemets poler är $s = -7.5 \pm 6.6i$.

(b) För $f > 0$ blir den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + (10f + 15)s + 100 = 0$$

För små värden på f blir polerna komplexa med realdel $-(10f + 15)/2$ som alltid är negativ. För $f \geq 0.5$ blir polerna reella, men båda på negativa realaxeln.

Svar: Det återkopplade systemet är stabilt för alla $f > 0$.

(c) Det relativa modellfelet fås genom att jämföra med sambandet

$$G^0(s) = G(s)\big(1 + \Delta_G(s)\big)$$

vilket ger

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s)}{G(s)} - 1 = -\frac{f}{0.1s + f}$$

(d) Uppgift c) ger

$$\mid \frac{1}{\Delta_G(i\omega)} \mid = \sqrt{1 + (\frac{\omega}{10 \cdot f})^2}$$

vilket för små ω är en vågrät linje på nivån ett och för ω över $10f$ växer mot oändligheten. Om $\mid \frac{1}{\Delta_G(i\omega)} \mid$ är nära ett vid resonanstoppen för det återkopplade systemet kommer robushetskriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \mid \frac{1}{\Delta_G(i\omega)} \mid$$

ej att uppfyllas. För t ex, $f = 5, \omega = 10$ fås att

$$\mid \frac{1}{\Delta_G(i\omega)} \mid = \sqrt{1 + (0.2)^2} \approx 1.02$$

vilket ligger under $G_C(i\omega)$. Stabiliteten kan alltså ej garanteras för alla f, vilket kan ses för exempelvis $f = 5$ enligt resonemanget ovan.