Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT22 Reglerteknik

Tentamensdatum: 3 januari 2023

1. (a) Se t ex uppgift 1.5 i exempelsamlingen. Uppgiften kan lösas på två olika sätt. Dels via Laplacetransformering som ger sambanden

$$Z(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

samt

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}Z(s)$$

Genom att multiplicera samman fås

$$Y(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}U(s)$$

d v s

$$(s^3+3s^2+3s+1)Y(s) = U(s)$$

Invers Laplacetransform ger sedan differentialekvationen

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = u(t)$$

Alternativt kan man utgå från den andra av de givna ekvationen, d v s

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = z(t)$$

och derivera vänster- och högerled, vilket ger

$$y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) = z'(t)$$

Genom att addera de båda ekvationerna fås, med hjälp av den första ekvationen i uppgiften,

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = z(t) + z'(t) = u(t)$$

(b) Det återkoppplade systemets överföringsfunktion ges av, se t ex ekvation 3.22 i läroboken,

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

Insättning av

$$G(s) = \frac{2}{(4s+1)} \qquad F(s) = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

ger

$$G_C(s) = \frac{K_P s + K_I}{4s^2 + (1+2K_P)s + 2K_I}$$

Med insatta värden fås den karakteristiska ekvationen

$$4s^2 + 5.6s + 4 = 0$$

vilket ger

$$s^2 + 1.4s + 1 = 0$$

vilket ger polerna

$$s = -0.7 \pm i \cdot 0.7$$

(c) Polernas relativa dämpning är $\zeta = 0.7$ och avståndet till origo är $\omega_0 = 1$. Via uttrycken i Exempel 3.3 i läroboken fås överslängen $M = 0.05$ (alternativt via Fig 2.7 i boken), d v s 5 procent och stigtiden $T_r = 2.2$ sekunder. **Svar:** Översläng 5 procent och stigtid 2.2 sekunder.

(d) Figurerna ger följande poler: I: $s = -0.7 \pm i \cdot 0.7$, II: $s = -0.5 \pm i \cdot 0.9$, III: $s = -1 \pm i \cdot 1.8$ samt IV: $s = -0.4 \pm i \cdot 2$. Polerna i IV har störst vinkel relativt negativa realaxeln, d v s lägre relativ dämpning, och därmed störst översläng, vilket hör samman med A. Polerna i II och III har samma relation mellan real- och imaginärdel, d v s samma relativa dämpning, så dessa svarar mot B och C. Polerna i III ligger dock längre från origo, vilket ger ett snabbare stegsvar, d v s B. Detta ger att II hör samman med C. Slutligen återstår I där vinkeln till negativa realaxeln är 45 grader och relativa dämpningen är ca 0.7 vilket motsvarar stegsvaret i D. Se också uppgift 2.6 i exempelsamlingen.

Svar: I - D, II - C, III - B, IV - A.

2. (a) Se t ex uppgift 4.7 i exempelsamlingen. Med insignalen $u(t) = 4 \sin t$ ges utsignalen, efter att den transienta delen dött ut, av

$$y(t) = 4 \mid G(i \cdot 1) \mid \sin(t + \arg G(i \cdot 1))$$

För systemet

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

ger detta

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

vilket ger $\mid G(i \cdot 1) \mid = 0.5$ samt

$$\arg G(i\omega) = -2 \arctan \omega$$

vilket ger $\arg G(i \cdot 1) = -2\pi/4 = -\pi/2$. Sammantaget ger detta

$$y(t) = 4 \cdot 0.5 \sin(t - \pi/2) = 2 \sin(t - \pi/2)$$

Svar: $y(t) = 2 \sin(t - \pi/2)$.

(b) Se t ex uppgift 4.12 i exempelsamlingen. Genom att sätta in $s = i\omega$ och beräkna absolutbeloppet fås

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{\sqrt{(\omega a)^2 + b^2}}{\sqrt{(c\omega)^2 + d^2}}$$

I fall (i) fås

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{\sqrt{0.25\omega^2 + 1}}{0.5\omega}$$

vilket medför att $\mid G(i\omega) \mid$ går mot oändligheten när ω går mot noll, vilket motsvarar A.

I fall (iv) fås

$$\mid G(i\omega) \mid = \sqrt{0.25\omega^2 + 1}$$

vilket medför att $\mid G(i\omega) \mid$ går mot oändligheten när ω går mot oändligheten, vilket motsvarar B.

I fall (ii) fås

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{\sqrt{0.25\omega^2 + 1}}{\sqrt{4\omega^2 + 1}}$$

som går mot 0.25 när ω går mot oändligheten, vilket motsvarar C. Motsvarande resonemang ger att (iii) hör samman med D.

Svar: (i) - A, (ii) - C, (iii) - D, (iv) - B.

3. (a) Det första delsystemet ger

$$X_2(s) = \frac{k}{Ts+1}U(s)$$

d v s

$$TsX_2(s) + X_2(s) = kU(s)$$

Invers Laplacetansform ger

$$\dot{x}_2(t) = -1/Tx_2(t) + k/Tu(t)$$

På motsvarande sätt fås för det andra delsystemet

$$sX_1(s) = X_2(s)$$

vilket ger

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Genom att samla tillståndsekvationerna på matrisform fås de givna ekvationerna. Se också uppgifterna 8.2, 8.12 och 8.10 i exempelsamlingen.

(b) Modellens poler fås exempelvis via nämnarna i de två delsystemen, vilket ger polerna $s = 0$ och $s = -1/T$. Polerna är också lika med egenvärdena till matrisen A i tillståndsmodellen, och egenvärdena kan läsas av på diagonalen eftersom matrisen är triangulär.

Svar: Polerna är 0 och $-1/T$.

(c) Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilket i detta fall ger, med $k = 1$,

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1/T & -1/T - l_2/T \end{pmatrix}$$

Matrisen egenvärden ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

vilket ger

$$\lambda^2 + \lambda(1/T + l_2/T) + l_1/T = 0$$

och med $T = 1$ fås

$$\lambda^2 + \lambda(1 + l_2) + l_1 = 0$$

Med önskad polplacering i -2 fås den önskade karakeristiska ekvationen

$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

vilket ger

$$l_1 = 4 \quad l_2 = 3$$

Svar: Återkopplingen ges av

$$u(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) + r(t)$$

(d) Med $T \neq 1$ och de värden på l_1 och l_2 som beräknades i uppgift c fås ekvationen

$$\lambda^2 + \frac{4}{T}\lambda + \frac{4}{T} = 0$$

vilket ger polerna

$$\lambda = -\frac{2}{T} \pm \sqrt{\frac{4}{T^2} - \frac{4}{T}}$$

För $T > 1$ fås komplexa poler,d v s ett oscillativt system, med realdel $-2/T$ d v s stabilt system. För $T < 1$ fås reella poler, vilka dock ligger i vänster halvplan för alla $0.2 < T < 1$.

Svar: Systemet är stabilt för alla $T > 0.2$, med reella poler för $0.2 < T \leq 1$ och komplexa poler för $T > 1$.

4. Känslighetsfunktionen ges av, se exempelvis ekvation 3.22 i läroboken,

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

Med insättning av

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad F(s) = K$$

fås

$$S(s) = \frac{s(s+1)}{s(s+1) + K}$$

(a) Genom att sätta in $s = 0$ i uttrycket för $S(s)$ fås att $S(0) = 0$. Se t ex avsnitt 4.2 i läroboken för definitionen av statisk förstärkning.

(b) Genom att sätta in $s = i\omega$ i $S(s)$ fås

$$\mid S(i\omega) \mid = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

Olikheten i uppgiften ger

$$\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2} < \omega\sqrt{\omega^2 + 1}$$

och genom att kvadrera vänster- och högerled fås

$$K^2 - 2\omega^2 K + \omega^4 + \omega^2 < \omega^4 + \omega^2$$

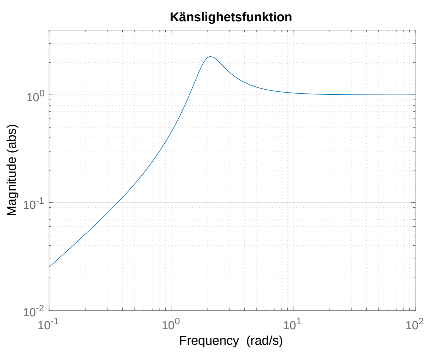
vilket ger

$$\omega > \sqrt{K/2}$$

Svar: $\mid S(i\omega) \mid > 1$ gäller för $\omega > \sqrt{K/2}$.

(c) För stora värden på ω kommer täljaren i $\mid S \mid$ att bete sig om ω^2 och nämaren också som ω^2 varmed $\mid S \mid$ kommer att gå mot ett. Detta kan ses ännu tydligare genom att dividera täljare och nämnare med ω^2 och låta ω gå mot oändligheten.

(d) Figuren visar känslighetsfunktionen för modellen i uppgiften samt $K = 4$. Se också fig 6.8 i läroboken för exempel på hur känslighetsfunktionen kan se ut.



Figur 1: Absolutbeloppet av känslighetsfunktionen.

(e)
- För $K = 0$ utgörs ekvationens rötter av rötterna till polynomet $P(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$, vilka alla ligger i vänster halvplan, så för små värden på $K > 0$ ligger ekvationens rötter i vänster halvplan oavsett $Q(s)$. Påståendet är sant.
- För $m = 1$ kommer en rot att gå mot roten till polynomet $Q(s)$, d v s slutpunkten, men eftersom $Q(s)$ ej är känt kan vi inte avgöra om slutpunkten ligger i vänster eller höger halvplan. Alltså behöver vi känna $Q(s)$ föra att avgöra påståendet.
- För $m = 2$ kommer två rötter att gå mot rötterna till polynomet $Q(s)$, d v s slutpunkterna, men eftersom $Q(s)$ ej är känt kan vi inte avgöra om slutpunkterne ligger i vänster eller höger halvplan. Alltså behöver vi känna $Q(s)$ föra att avgöra påståendet.

5. (a) Genom att jämföra det allmänna uttrycket

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

med det aktuella fallet

$$G^0(s) = G(s)e^{-sT}$$

fås

$$\Delta G(s) = e^{-sT} - 1$$

Svar:

$$\Delta G(s) = e^{-sT} - 1$$

(b) Uttrycket på $\Delta G(s)$ ger

$$\Delta G(i\omega) = e^{-i\omega T} - 1 = \cos\omega T - i\sin\omega T - 1$$

vilket ger absolutbeloppet

$$\mid \Delta G(i\omega) \mid = \mid e^{-i\omega T} - 1 \mid = \sqrt{1 + \cos^2\omega T - 2\cos\omega T + \sin^2\omega T} = \sqrt{2 - 2\cos\omega T}$$

Det relativa modellfelet är som störst när cosinustermen är minus ett och då är $\mid \Delta G(i\omega) \mid = 2$. För att kriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

ska gälla för alla ω och T måste det gälla att

$$\mid G_C(i\omega) \mid < 1/2$$

Se också uppgift 6.5 i exempelsamlingen.

(c) Med $F(s) = K$ och

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

fås

$$G_C(s) = \frac{K}{s+1+K}$$

samt

$$\mid G_C(i\omega) \mid = \frac{K}{\sqrt{(1+K)^2 + \omega^2}}$$

Eftersom $\mid G_C(i\omega) \mid$ är störst för $\omega = 0$ fås kravet

$$\frac{K}{1+K} < 0.5$$

vilket ger $K < 1$.

Svar: Kravet är $K < 1$.

(d) Med $K < 1$ kommer

$$\mid G_O(i\omega) \mid = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

alltid att vara mindre än ett, vilket innebär att det inte finns någon amplitudskärfrekvens, och fasmarginalen inte är definierad. På motsvarande sätt kommer $\arg G_O(i\omega)$ aldrig att anta värdet $-180°$ vilket gör att inte heller amplitudmarginalen är definerad.