Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT22, 19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 28 oktober 2022

1. (a)
   - Styrsignaler: rodervinklar, gaspådrag till motorer
   - Utsignaler: kurs, fart, höjd
   - Störsignaler: vind (turbulens)

   (b) Systemet är instabilt. Utsignalen kommer att växa obegränsad och stigtiden är odefinierad.

   (c) Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

   Med insatta uttryck på $F(s)$ och $G(s)$ fås

$$G_C(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(2s+1)^2 + K_D s^2 + K_P s + K_I}$$

   Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av nämnaren i $G_C(s)$, vilket ger

$$4s^3 + (4 + K_D)s^2 + (K_P + 1)s + K_I = 0$$

   (d) I figur B och D fås ett stationärt fel, vilket hör samman med (i) och (iii) som saknar I-del. Stegsvaret i D har lägre översläng, vilket hör samman med (iii) som har D-del. Alltså D - (iii) och B - (i). Stegsvaret i A är bättre dämpat, vilket hör samman med (iv) som har D-del. Alltså A - (iv) och därmed C - (ii).

   Svar: A - (iv), B - (i), C - (ii) och D - (iii).

2. (a) Stegsvaren i B och C går mot ett, vilket svarar mot system med statisk förstärkning ett, vilket gäller för I och IV. Stegsvaret i C har större översläng vilket svara mot en högre respnanstopp, vilket ses i I, vilket ger C - I och B - IV. Stegsvaren i A och D går mot fyra respektive tre, och eftersom II har statisk förstärkning tre hör denna samman med D, och III hör samman med A. Det ger D - II och A - III.

   Svar: A - (III), B - (IV), C - (I) och D - (II).

   (b)
   - Med $F(s) = 0.5$ får $G_O(i\omega)$ skärfrekvensen 3 rad/s. Vid $\omega = 3$ är $\arg G_O(i\omega) \approx -130°$, vilket ger att fasmarginalen är ca 50°. Vidare ges felkoefficienten e_0 av

     $$e_0 = \frac{1}{1 + G_O(0)}$$

     Avläsning i diagrammet ger $G(0) = 10$, vilket ger

     $$e_0 = \frac{1}{1 + 0.5 \cdot 10} = \frac{1}{6}$$

   - En tidsfördröjning på T sek medför att argumentkurvan sänks med $-\omega T$ radianer. Eftersom amlitudskärfrekvensen är 3 rad/s och fasmarginalen är 50° ger detta kravet

     $$50\frac{\pi}{180} - 3 \cdot T > 0$$

     för att fasmarginalen, inklusive inverkan av tidsfördröjningen, ska vara positiv för att få ett stabilt återkopplat system. Detta ger kravet

     $$T < \frac{50}{3}\frac{\pi}{180}$$

3. (a) Med de angivna tillståndsvariablerna fås

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt, med hjäp av den givna ekvationen,

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \frac{b}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

Med tillståndsvektorn

$$x(t) = (x_1(t) \;\; x_2(t))^T$$

kan modellen skrivas på matrisform enligt

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) Systemets poler ges av rötterna till ekvationen

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

vilket ger ekvationen

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

som har rötter

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Rötterna är reella om uttrycket under rottecknet är posititvt, d v s

$$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0$$

vilket ger

$$b > 2\sqrt{mk}$$

(c) Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilket i detta fall ger

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - l_1 & -0.5 - l_2 \end{pmatrix}$$

Matrisen egenvärden ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

vilket ger

$$\lambda^2 + \lambda(0.5 + l_2) + 1 + l_1 = 0$$

Med önskad polplacering i -2 fås den önskade karakeristiska ekvationen

$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

vilket ger

$$l_1 = 3 \quad l_2 = 3.5$$

Svar: $u(t) = -3x_1(t) - 3.5x_2(t) + r(t)$

(d) Det återkopplade systemet ges av

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

När $r(t)$ är ett steg med värdet ett kommer massan att hamna i en konstant position $\bar{y} = \bar{x}_1$ och hastigheten kommer att vara noll.Enligt den andra tillståndsekvationen fås

$$0 = -4\bar{x}_1 - 4 \cdot 0 + 1$$

vilket ger $\bar{y} = \bar{x}_1 = 1/4$. Detta ger att insignalen kommer att vara

$$\bar{u} = -3\bar{x}_1 + 1 = -3/4 + 1 = 1/4$$

Styrsignalen (kraften) kommer att vara lika stor, men motriktad, som kraften från den hoptryckta fjädern.

(e) Kriteriet på matrisform fås med matriserna

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad R = 5$$

4. (a) Blockschemat ger att sambandet mellan störningen v och e ges av

$$E(s) = G_V(s)V(s)$$

där

$$G_V(s) = \frac{-0.2G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Insättning av $G(s)$ och $F(s) = K$ enligt uppgiften och förenkling ger

$$G_V(s) = \frac{-0.2}{16s^2 + 8s + 1 + K}$$

(b) Amplituden hos $e(t)$ när $v(t) = \sin 0.1t$ bestäms av $\mid G_V(i\omega) \mid$ vid $\omega = 0.1$. Detta ger

$$\mid G_V(i \cdot 0.1) \mid = \frac{0.2}{\sqrt{(0.84 + K)^2 + 0.64}}$$

Kravet på amplituden hos $e(t)$ ger därmed kravet

$$\mid G_V(i \cdot 0.1) \mid \leq 0.1$$

vilket ger

$$K > \sqrt{3.36} - 0.84 = 0.99$$

(c) Den karakteristiska ekvationen ges av

$$16s^2 + 8s + 1 + K = 0$$

d v s

$$s^2 + 0.5s + \frac{1 + K}{16} = 0$$

Genom att jämföra med

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

fås

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1 + K}}{4}$$

och

$$2\zeta\omega_0 = 2\zeta\frac{\sqrt{1 + K}}{4} = 0.5$$

vilket ger

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + K}}$$

Kravet att ζ skall vara större än 0.7 ger därmed

$$\frac{1}{\sqrt{1 + K}} > 0.7$$

där därmed $K < 1.04$. De båda kraven kan därmed uppfyllas med valet $K = 1$.

5. (a) Det återkopplade systemet när $F(s) = K$ appliceras på $G^0(s)$ ges av

$$G_C^0(s) = \frac{KG^0(s)}{1 + KG^0(s)}$$

vilket ger den karakteristiska ekvationen

$$s^2 + s + 4(1 + \alpha) = 0$$

som har rötterna

$$s = -0.5 \pm \sqrt{0.25 - 4(1 + \alpha)}$$

För alla $\alpha > 0$ är uttrycket under rottecknet negativt, vilket gör att rötterna är komplexa, med realdelen -0.5, vilket gör att rötterna ligger i VHP för alla $\alpha > 0$, d v s det återkopplade systemet är stabilt.

(b) Genom att jämföra med det allmänna uttrycket

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

får vi att det relativa modellfelet blir $\Delta G(s) = \alpha$ i detta fall.

(c) Enligt robusthetskriteriet garanteras stabilitet hos det återkopplade systemet om

$$\mid T(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

där, i detta fall, $T(i\omega) = G_C(i\omega)$. Med det aktuella uttrycket på ΔG fås

$$\mid T(i\omega) \mid < \frac{1}{\alpha}$$

Vidare är

$$T(s) = \frac{F(s)\,G(s)}{1 + F(s)\,G(s)} = \frac{4}{s^2 + s + 4}$$

Kriteriet blir då

$$\alpha < \left| \frac{(i\omega)^2 + i\omega + 4}{4} \right| = \frac{1}{4}\sqrt{\left(4 - \omega^2\right)^2 + \omega^2} \quad \forall\omega$$

Kriteriet på α är det lägsta värdet på högerledet, som fås om man låter $a = \omega^2$ och minimerar uttrycket

$$\begin{aligned} \min_a g(a) = (4 - a)^2 + a \iff \\ g'(a) = -2(4 - a) + 1 = 0 \iff \\ -7 + 2a = 0 \iff \\ a = \omega^2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Detta värde på ω^2 ger det lägsta värdet på högerledet i kriteriet, som blir

$$\alpha < \frac{1}{4}\sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \approx 0.484$$

Svar: Robusthetskriteriet garanterar att det återkopplade systemet är stabilt för $0 \leq \alpha < 0.484$.

(d) **Svar:** Robusthetskriteriet är ett tillräckligt kriterium, men inte nödvändigt, så systemet kan vara stabilt trots att kriteriet inte uppfylls. Kriteriet att alla poler ligger i vänster halvplan är både tillräckligt och nödvändigt, så systemet är asymptotiskt stabilt om det kriteriet uppfylls och instabilt om det inte uppfylls. Detta syns i (a) och (c) då systemet enligt (a) är stabilt för alla $\alpha \geq 0$, medan robusthetskriteriet i (c) endast kan garantera stabilitet för $0 \leq \alpha < 0.484$.