# Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT22 Reglerteknik

Tentamensdatum: 7 januari 2022

1. (a) Fall (ii) har lägst relativ dämpning vilket motsvarar stegsvaret med högst översläng, d v s C. På motsvarande sätt har (i) störst relativ dämpning, vilket motsvarar D med minst översläng. Fall (iii) och (iv) har samma relativa dämpning, men i fall (iv) har polerna större absolutbelopp, vilket svarar mot ett snabbare stegsvar, d v s kurva A, vilket medför att B hör samman med (iii).

   **Svar:** A - (iv), B - (iii), C - (ii) och D - (i).

   (b) Utsignalen ges av

$$y(t) = 4 \mid G(i3) \mid \sin(3t + \arg(G(i3)))$$

   där

$$\mid G(i3) \mid = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

   och

$$\arg G(i3) = -\arctan\frac{3}{4} = -0.64$$

   Detta ger

$$y(t) = 1.6\sin(3t - 0.64)$$

   **Svar:**

$$y(t) = 1.6\sin(3t - 0.64)$$

   (c) Överföringsfunktionen ges av uttrycket

$$G(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B$$

   vilket ger

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2}$$

   vilket ger att modellen har ett nollställe i $-4$.

   **Svar:** Modellen har ett nollställe i $-4$.

2. (a) De begränsande faktorerna är:
   - Modellosäkerhet
   - Mätstörningar
   - Styrsignalbegränsningar

   (b) 1 **Omöjligt att avgöra utan att känna $P(s)$.** Rötterna till den karakteristiska ekvationen startar i rötterna till $P(s)$ för $K = 0$, och om dessa ligger i höger halvplan kommer den karakteristiska ekvationens rötter att vara i HHP för små värden på $K$.

   2 **Sant.** När $K$ blir stort kommer två rötter att gå mot $-1$ respektive $-2$, och den tredje roten kommer att följa asymptoten som går mot minus oändligheten utmed negativa realaxeln.

   3 **Omöjligt att avgöra utan att känna $P(s)$.** När $K$ blir stort kommer två rötter att gå mot $-1$ respektive $-2$. De två övriga rötterna kommer att följa varsin asymptot vilka har riktningarna $\pi/2$ respektive $3\pi/2$. Vi skulle dock behöva känna $P(s)$ för att avgöra om asymptoterna hamnar i vänster eller höger halvplan.

   (c) I kurvorna A och D går utsignalen mot ett, vilket motsvarar att $K_I > 0$, d v s (iii) och (iv). Fall (iv) innehåller en D-del, medan övriga koffecienter är desamma som i (iii), vilket ger ett bättre dämpat stegsvar, vilket fås i A. Alltså hör D samman med (iii). På motsvarande sätt gör D-delen i fall (i) att stegsvaret blir bättre dämpat, vilket fås i C, och därmed hör (ii) samman med B.

   **Svar:** A - (iv), B - (ii), C - (i) och D - (iii)

3. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K\bar{k}}{T} = 0$$

   vilket med insatta värden ger

$$s^2 + 4s + 200K = 0$$

   Jämförelse med

$$s^2 + 2 \cdot 1 \cdot \omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

   ger $\omega_0 = 2$ och $K = 0.02$.

   **Svar:** $K = 0.02$.

   (b) Relativ dämpning ett och $\omega_0 = 2$ innebär att det återkopplade systemet har en dubbelpol i $-2$, vilket innebär att överslängen är noll. Enligt uttrycket i Exempel 3.3 i boken ges stigtiden, för fallet att den relativa dämpningen är ett, av

$$T_r = \frac{1}{\omega_0}e$$

   vilket ger $T_r = 1.36$.

   (c) $G^0(s)$ enligt förutsättningarna innebär att $\Delta G(s) = \alpha$. Då det är känt att $\mid \alpha \mid < 0.4$ innebär robusthetskriteriet kravet $\mid G_c(i\omega) \mid < 1/0.4 = 2.5$.

   Amplitudkurvan får ej överskrida 2.5 för att stabilitet skall kunna garanteras. Figuren visar att kurvan överskrider detta värde, vilket betyder att stabilitet ej kan garanteras. Amplitudkurvans maxvärde är ca 3.5. Detta innebär att stabilitet kan garanteras om man med säkerhet vet att $\mid \alpha \mid < 0.29$.

   **Svar:** Stabilitet kan endast garanteras om $\mid \alpha \mid < 0.29$.

4. (a) Med tillståndsvariablerna $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = \dot{y}(t)$ fås tillståndsekvationerna

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

och

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) - 2y(t) + 2u(t) = -2x_1(t) - x_2(t) + 2u(t)$$

och på matrisform ger detta

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

(b) Polerna ges av egenvärdena till matrisen $A$, vilka ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

vilket ger

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

som har rötterna

$$\lambda = -0.5 \pm i\sqrt{1.75} = -0.5 \pm i1.32$$

Svar: Modellens poler ges av $\lambda = -0.5 \pm i1.32$

(c) Det återkopplade systemets poler ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

vilket ger ekvationen

$$\lambda^2 + (1 + 2l_2)\lambda + 2 + 2l_1 = 0$$

Med den önskade polplaceringen fås den önskade karakteristiska ekvationen

$$(\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i) = \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

En jämförelse ger

$$l_1 = 3 \quad l_2 = 1.5$$

vilket ger återkopplingen

$$u(t) = -3x_1(t) - 1.5x_2(t) + l_0 r(t)$$

(d) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} l_0 r$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

För en konstant referenssignal $r(t) = \bar{r}$ gäller i stationär tillstånd att $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, vilket ger

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -8x_1 - 4x_2 + 2l_0\bar{r} = 0$$

och med $x_2 = 0$ och $y = x_1$ ger detta

$$y = \frac{2l_0}{8}\bar{r}$$

och med $l_0 = 1$ ger detta den statiska förstärkningen 1/4. Den statiska förstärkningen för det återkopplade systemet kan även bestämmas genom att beräkna $G_C(0)$ där

$$G_C(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_0$$

**Svar:** Den statiska förstärkningen för det återkopplade systemet blir 0.25.

5. (a) Sambanden mellan sammanfattas i Tabell 11.1 i boken. Följande samband gäller:

- Snabbheten hos det återkopplade systemet (stigtiden hos stegsvaret) kan beskrivas med hjälp av bandbredden hos $G_C$. En hög bandbredd hos $G_C$ ger en kort stigtid och tvärt om.
- Svängighet hos det återkopplade systemet (överslängen i stegsvaret) kan relateras till resonanstoppen $M_p$ hos $G_C(s)$. Ett system med hög resonanstopp och har stor översläng hos stegsvaret.
- Felkoefficienten $e_0$ kan enligt Tabell 11.1 uttryckas

$$e_0 = 1 - G_C(0)$$

d v s felkoefficienten är noll om $G_C(0) = 1$.

Frekvensfunktionern $G_O(i\omega)$ är ett komplext tal, vilket kan skrivas på polär form som

$$G_O(i\omega) =\mid G_O(i\omega) \mid e^{i \arg G_O(i\omega)}) \tag{1}$$

(b) Vid fasskärfrekvensen $\omega_P$ gäller $|G_O(i\omega_P)| = 1/A_m$ och $\arg G_O(i\omega_P) = -180°$ d v s ekvation (1) ger att $G_O(i\omega_P) = -1/A_m$. Insättning i uttrycket för det återkopplade systemet ger:

$$G_c(i\omega_P) = \frac{G_o(i\omega_P)}{1 + G_o(i\omega_P)} = \frac{-1/A_m}{1 - 1/A_m} = \frac{-1}{A_m - 1} \tag{2}$$

vilket get

$$|G_c(i\omega_P)| = \frac{1}{A_m - 1} \tag{3}$$

däe $A_m > 1$ eftersom det återkopplade systemet är stabilt.

(c) Vid amplitudskärfrekvensen gäller $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Om fasmarginalen är 90° innebär det att $\arg G_O(i\omega_C) = -90°$, d v s ekvation (1) medför att

$$G_o(i\omega_c) = -i$$

Insatt i överföringsfunktionen för det återkopplade systemet ger det

$$|G_c(i\omega_C)| = \frac{|-i|}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bandbredden definieras som den frekvens för vilken förstärkningen sjunker under $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det är alltså visat att $\omega_B = \omega_c$ om $\varphi_m = 90°$.

(d) Vid skärfrekvensen gäller $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Om fasmarginalen är $\varphi_m$ innebär det att $\arg G_O(i\omega_C) = -180° + \varphi_m$. Ekvation (1) ger

$$G_O(i\omega_c) = e^{-i\pi} \cdot e^{i\varphi_m} = -e^{i\varphi_m} = -\cos\varphi_m - i\sin\varphi_m$$

vilket ger att kravet blir

$$|G_c(i\omega_c)| = \frac{1}{|1 - \cos\varphi_m - i\sin\varphi_m|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\varphi_m)^2 + \sin^2\varphi_m}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\varphi_m}} < 1.$$

Detta ger att $\cos\varphi_m < 0.5$ vilket uppfylls då $\varphi_m > 60°$.