Lösningsförslag TSRT19/23

Tentamensdatum: 20240108

1. (a) $H_1(s)$ är rimlig då den har en förstärkning kring 1 upp till ungefär bandbredden 5 rad/s och sedan har en minskande förstärkning. I den kritiska frekvensen är förstärkningen $|G_1(10i)| = \frac{5}{\sqrt{10^2+5^2}} \approx 0.447$ vilket åtminstonde är mindre än 1 dvs mätfelet dämpas. $H_2(s)$ kan förkastas då mätfel i frekvensen 10 rad/s förstärks med $|G_2(10i)| = \frac{100}{\sqrt{(100-100)^2+10^2}} = 10$, dvs mätfelen förstärks kraftigt och filtret skulle helt motverka sitt syfte.

   (b) Överföringsfunktion från u till y ges av $C(sI-A)^{-1}B+D$ så för att båda ska kunna ha rätt måste denna bli samma för båda modellerna. Vid kontroll visar sig båda bli $\frac{s+1}{s^2+2s+3}$. Alternativt så noterar man utan beräkningar att de två modellerna är styrbar respektive observerbar realisering av just denna överföringsfunktion. Jenny och Benny har förmodligen börjat med en överföringsfunktion, och sedan skapat en tillståndsmodell från denna.

   (c) Från experimentet vet vi enligt slutvärdessatsen att $G(0) = \frac{1}{2}$. Slutna systemet ges av $G_C = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}$ och således $G_C(0) = \frac{G(0)F(0)}{1+G(0)F(0)} = \frac{5}{1+5}$ och ett enhetsstegsvar kommer alltså få en utsignal som konvergerar till 5/6.

   (d) Den totala tidsfördröjningen kommer bli $T = \frac{2\cdot 384000}{300000} = 2.56$ sekunder. Fasförlusten ges av ωT och i skärfrkevensen kommer denna därför vara 0.768 rad, vilket därför är den minsta möjliga fasmarginalen vi måste ha för att inte få instabilitet pga tidsfördröjningarna.

2. (a) Eftersom amplituden på insignalen är 1 och alla stegsvar konvergerar till 1 så vet vi att statiska förstärkningen är 1 och att systemen är stabila. Vi kan således direkt stryka det instabila systemet $G_3(s)$ samt $G_5(s)$ som har statisk förstärkning 1/2.

   Stegsvar D har en översläng men viktigast en undersläng vilket indikerar ett nollställe i högra halvplanet vilket kopplar oss till $G_1(s)$.

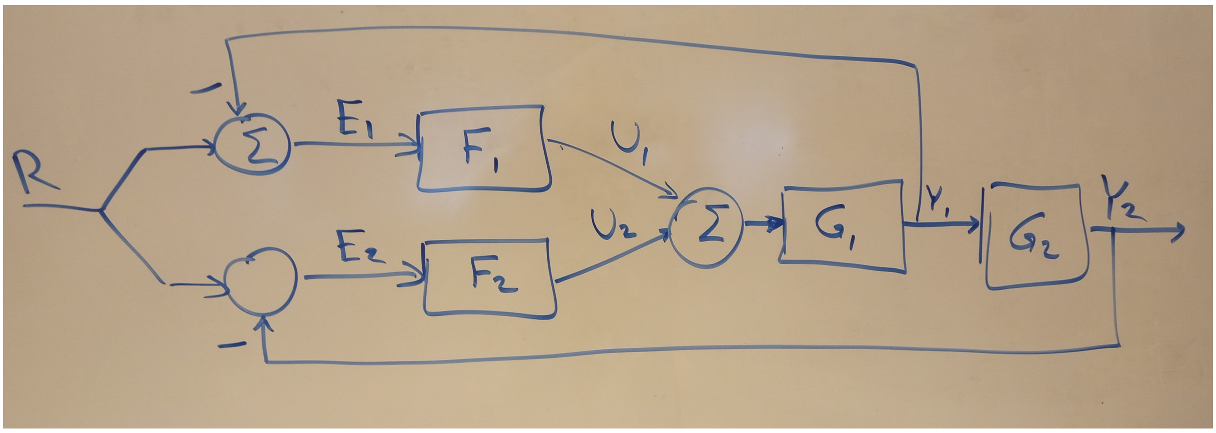
   Stegsvar C har också en översläng, och enda systemet kvar med komplexa poler är $G_2(s)$.

   De två återstående stegsvaren skiljer sig genom att B är långsammare än A. I de två återstående systemen ser vi att de har en gemensam pol men att G_4 har en extra pol, dvs vi har $G_4(s) = \frac{2}{s+2}G_6(s)$. Det som händer när vi gör ett stegsvar på $G_4(s)$ är alltså att responsen bör vara långsammare jämfört med $G_6(s)$ (responsen för $G_4(s)$ kommer vara att utsignalen från $G_6(s)$ går vidare som insignal genom $\frac{2}{s+2}$, dvs steget saktas ner två gånger)

   Sammanfattat $A - G_6(s), B - G_4(s), C - G_2(s), D - G_1(s)$

   (b) Varje delsystem $\frac{3}{2s+8}$ ger en fasförskjutning på $-\arctan(2/8) = -0.245 = -14°$. Således kan vi som mest seriekoppla 3st.

   (c) T.ex (grafisk placering av block kan göras på många olika sätt)



3. (a) Om det inte fanns några vargar så skulle hararna växa exponentiellt med tillväxttakten 0.1. Dock så äter vargar upp harar (minskar hararnas tillväxttakt) med faktorn 0.3. För att vargar skall växa i antal krävs det att det finns harar att äta, och hur effektivt vargpopulationen växer baserat på hur många harar det finns beskrivs med konstanten 0.05. Om det ej finns några harar dör vargarna ut direkt med mortalitetskonstanten 0.2.

   (b) Välj t.ex tillstånden $x_1(t) = h(t)$ och $x_2(t) = v(t)$, tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 \\ 0.05 & -0.2 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{0}_{D} u(t).$$

   (c) Två poler i -0.1 innebär en önskad karakteristiskt ekvation $(s + 0.1)^2 = s^2 + 0.2s + 0.01 = 0$. Om vi använder styrlagen $u = Lx + l_0 r = [l_1\ l_2]x + l_0 r$ så blir systemmatrisen för det slutna systemet $A + BL$ och den karakteristiska ekvationen beräknas med

$$\det(\lambda I - (A + BL)) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 0.1 - l_1 & 0.3 - l_2 \\ -0.05 & \lambda + 0.2 \end{bmatrix}\right) = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda - 0.1 - l_1)(\lambda + 0.2) + 0.015 - 0.05l_2 = \lambda^2 + (0.1 - l_1)\lambda - 0.005 - 0.05l_2 - 0.2l_1 = 0,$$

jämför med den önskade ekvationen ovan och identifiera $l_1 = -0.1$ och $l_2 = 0.1$. Överföringsfunktionen $C(sI - (A + BL))^{-1}B$ blir

$$Y(s) = \frac{0.05l_0}{s^2 + 0.2s + 0.01} R(s),$$

för att den statiska förstärkningen skall bli 1, måste $l_0 = 0.2$ väljas. Återkopplingen blir alltså $u(t) = -0.1h(t) + 0.1v(t) + 0.2r(t)$. (5 p)

   (d) I situationer då man inte kan mäta alla tillstånd så kan man använda en observatör för att skatta fram de övriga tillstånden. För att studera om en observatör kan skatta alla tillstånd från en mätsignal gör man observerbarhetstestet.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.05 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Systemet är observerbart från vargmätningarna om $\det \mathcal{O} \neq 0$, vilket vi har här.

4. (a) Slutna systemet blir $G_C(s) = \frac{K_P(-2s+1)}{s^2+(3-2K_P)s+1+K_P}$. Systemet blir instabilt om $K_P > 3/2$ och idén att man bara ökar K_P för att göra slutna systemet allt snabbare kan alltså inte fungera.

   (b) Polerna kan bli instabila eftersom K_P kommer in i polpolynomet i multiplikation med den negativa konstanten -2. Denna konstant kommer från nollställepolynomet till öppna systemet $\underline{-2}s + 1$. Med andra ord, p.g.a det instabila nollstället (dvs ett nollställe i höger halvplan, även kallat icke-minfas) så har vi fått vår begränsning.

   (c) Eftersom $G(s)$ har statisk förstärkning $G(0) = 1$ så får man ej något statiskt reglerfel vid öppen styrning (dvs vi kan nog misstänka att det redan finns någon enkel intern reglering i systemet). Statiska förstärkningen för slutna systemet är däremot $G_C(0) = \frac{K_P}{K_P+1}$. Således får vi alltid statiskt reglerfel, och det kommer dessutom bli stort eftersom statiska förstärkningen blir uppåt begränsad av $\frac{3/2}{1+3/2} = 0.6$.

   (d) Med $K_P = 1/2$ får vi $G_C(s) = \frac{-s+0.5}{s^2+2s+1.5}$. Komplementära känslighetsfunktionen ges av $T(s) = G_C(s)$ eftersom vi har en enkel återkoppling av reglerfel (dvs inte separat framkoppling av referens och återkoppling av mätsignal). Robusthetskriteriet säger att komplementära känslighetsfunktionen måste vara liten där relativa modelfel är stora, så vi kontrollerar i den specifika frekvensen $|T(100i)| = \left|\frac{-100i+0.5}{(100i)^2+2\cdot 100i+1.5}\right| = \frac{\sqrt{0.5^2+100^2}}{\sqrt{(1.5-100^2)^2+100^2}} \approx 0.01$. Robusthetskriteriet säger således att vi klarar av relativa modellfel som uppfyller $|\Delta(100i)| < 100$, dvs modellen kan vara väldigt fel så det bör inte vara några bekymmer.

5. (a) Ja (Statiska reglerfelet bestäms av känslighetsfunktionens statiska förstärkning vilken ges av $\frac{1}{1+G(0)F(0)}$. Vi ser att $G(0)F(0)$ inte går mot oändligheten och således blir känslighetsfunktionens statiska förstärkning inte noll)

(b) Ja (Fasmarginalen ϕ_M är väldigt liten, och eftersom slutna systemets resonanstopp är nedåt begränsad av $\frac{1}{\sin(\phi_M/2)}$ så blir den stor)

(c) Nej (Tidsfördröjning T ger fasförlust på ωT så vid t.ex 1 rad/s skulle tidsfördröjningen ge en förlust på 10 rad (572°) och fortsatt sänka fasen än mer i högre frekvenser, vilket vi verkligen inte ser något tecken på)

(d) Nej (Då skulle $|G(0)F(0)|$ vara oändlig vilket vi inte ser ut att ha)

(e) Går ej att avgöra (Vi kan enbart dra slutsatser om produkten $G(s)F(s)$. De enskilda delarna $G(s)$ och $F(s)$ vet vi inget om)