Lösningar till tentamen i TSRT19 Reglerteknik

Tentamensdatum: 2023-03-14

Johan Löfberg

1. (a) Systemet är asymptotiskt stabilt och utsignal kommer ges av $4|G(3i)|\sin(3t + arg(G(3i)))$. Vi har $|G(3i)| = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0.277$ och $\arg(G(3i)) = -\arctan(3/2) = -0.98 = -56.3°$

   (b) Systemet är instabilt, $\dot{y} = y + u$, och således går utsignalen mot $\pm\infty$ (tecken beroende på initialtillstånd).

   (c) Man förlorar ofta stabilitetsmarginaler och riskerar få ett oscillativt återkopplat system eller till och med instabilitet.

   (d) Nämnaren är ett 5:e gradens polynom, således krävs fem tillstånd (nämnaren har lägre ordning, och har inga gemnsamma rötter med täljaren som förkortas bort). En tillståndsmodell kan t.ex skapas genom att man utvecklar polynomen och använder styrbar eller kanonisk form.

   (e) Om vi jämför med standardmodellen $K\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s 0\omega_0^2}$ så har vi att $\omega_0 = \sqrt{b}$ och $\zeta = \frac{a}{2\omega_0} = \frac{a}{2\sqrt{b}}$. Om vi ökar a men håller b konstant så kommer dämpningen öka. Om vi ökar b men håller a konstant så minskar dämpningen.

   (f) Summerar vi de två överföringsfunktionerna så får vi summan $\frac{1}{2}$. Detta kan ej stämma då vi vet att vi alltid måste ha $S + T = 1$.

2. (a) Med stegamplitud c ges lösningen av $y(t) = Kc(1 - e^{-t/T})$. Vi kan använda vilken tidpunkt som helst, t.ex $t = 2.5$ där vi läser av att utsignalen är 10 vilket ger oss ekvationen $10 = K \cdot 4000(1-e^{-2.5/36})$ vilket ger oss $K = 0.037$. Ett alternativt sätt är att studera den underliggande differentialekvationen $T\dot{y}(t)+y(t) = Ku(t)$. När $y(t)$ är liten (dvs initialt) så kommer vi ungefär ha $T\dot{y}(t) \approx Ku(t)$. I figuren ser man att derivatan är ganska så konstant över mätperioden (eftersom $y(t)$ fortfarande är så liten och inte börjat bromsa stegsvaret) och är ungefär 10/2.5. Således löser vi $36 \cdot (10/2.5) = K \cdot 4000$ och får $K = 0.036$.

   (b) Det utmärkande i de två responsfigurerna är att den övre påvisar ett system som har en lägre förstärkning i den högre frekvensen, medan den nedre har en högre förstärkning i den högre frekvensen. System A har en fallande förstärkning för ökande frekvens och kan således omöjligt vara kopplat till respons 2. System B däremot har ett område där frekvensen ökar med ökande frekvens, och kan därför vara kopplad till Respons 2.

   (c) Den långsamma signalen har en periodtid på omkring 6 sekunder, dvs en frekvens omkring 1 rad/s. Båda systemen har där en förstärkning omkring $0dB = 1$, och vi ser att responsen har en amplitud omkring 5, vilket gör att vi kan sluta oss till att insignalen haft en amplitud på ungefär 5.

   (d) Känslighetsfunktionen ges av $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$. Ur figur ser vi att $|G(1i)| = 20dB = 10$ och $\arg G(1i) = -90°$, dvs $G(1i) = -10i$. Vi får $S(1i) = \frac{1}{1-10i}$ och att förstärkningen därför blir $\frac{1}{\sqrt{1^2+10^2}}$.

3. (a) Rotort 1 och 3 uppvisar enbart reella poler för alla K. Rotort 2 har komplexvärda poler för tillräckligt stora K, och rotort 4 påvisar komplexvärda poler för alla K, men har dock förmodligen en dominerande reell pol för små K. Stegsvar A och B har inga oscillationer för något K. Stegsvar C och D har oscillationer för tillräckligt stora K.

   Rotort 3 har en dominerande pol som ej ändrar sig nämnvärt m.a.p. K. Stegsvar A har stegsvar med ungefär samma stigtid oavsett val av K. Således (A,3), och per uteslutning (B,1).

   Rotort 4 visar på ett system som kan bli instabilt, men är stabilt för små K och domineras då av en långsam reell pol. Stegsvar i C är på gränsen instabilt för stora K samt långsamt monotont för små K. Således (C,4) och (D,2).

   Notera att man kan lösa uppgiften utan att egentligen veta vilken av de tre stegsvaren som är vilka, dvs alla stegsvar skulle kunna ha varit heldragna.

   (b) Om vi antar $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ och använder $F(s) = K$ så får vi slutna systemet $\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. Rotorten är alltså ritad för karakteristiska ekvatione n $D(s) + KN(s) = 0$. Startpunkterna är per definition rötterna till $D(s)$. System 1, 2 och 4 har en startpunkt i origo, dvs en pol i 0. Således ser $G(s)$ ut som $\frac{N(s)}{s\tilde{D}(s)}$ för dessa system, dvs de har integralverkan. System med integralverkan som återkopplas med en P-regulator har statisk förstärkning 1 oavsett val av förstärkning K. Syns enkelt i vår notation här med $G_c(0) = \frac{KN(0)}{0\tilde{D}(0)+KN(0)} = \frac{N(0)}{N(0)} = 1$

(c) Vi noterar att regulatorn har en instabil pol, vilket bör kännas lite nervöst. Slutna systemet från $R(s)$ till $Y(s)$ ges av $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$. Insättning ger $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)+(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+6s+7}$ som har stabila rötter (notera att $(-s+1)$ förkortades bort)

Syrsignalen ges av $U(s) = F(s)(R(s) - G(s)U(s))$ ur vilket vi får $U(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Insättning ger $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(-s+1)(s^2+6s+7)}$. Det viktiga vi ser här är att vi har en instabil pol. Vid ett stegsvar kommer alltså styrsignalen att gå mot oändligheten. Det öppna systemet har ett problematiskt instabilt nollställe (som kan ge underslängar etc). I reglerdesignen har vi försökt trolla bort detta ur det slutna system genom att förkorta bort det i regulatorn. Det straffar sig dock uppenbarligen. (I praktiken skulle man dessutom få ett instabilt stegsvar, eftersom vi aldrig vet poler och nollställen exakt, och när vi sedan försöker förkorta bort systemets nollställe, så kommer detta ej lyckas exakt.)

4. (a) Kretsförstärkningen blir $G_o(s) = \frac{K}{sT+1}$ och skärfrekvensen definieras av $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Här får man att

$$\frac{K}{\sqrt{\omega_c^2T^2+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K^2 = \omega_c^2T^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{\sqrt{K^2-1}}{T}.$$

(b) Det slutna systemets bandbredd är den vinkelfrekvens ω_B där $|G_c(i\omega_B)| = \frac{|G_c(0)|}{\sqrt{2}}$. I det aktuella fallet är det slutna systemet

$$G_c(s) = \frac{K}{sT+1+K}$$

vilket ger

$$\frac{K}{\sqrt{\omega_B^2T^2+(1+K)^2}} = \frac{K}{(1+K)\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 2(1+K)^2 = \omega_B^2T^2 + (1+K)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \frac{1+K}{T}.$$

(c) Vi har $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ samt $\dot{x}_2 = \ddot{y} = \frac{1}{m}(-f\dot{y} - ky + u) = \frac{1}{m}(-fx_2 - kx_1 + u)$. Vår tillståndsmodell blir

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(d) Antingen så räknar på med egenvärdesplacering av $A - BL$ med modellen ovan, eller så stoppar man in återkopplingen $u = -Lx + r = -l_1x_1 - l_2x_2 + r = -l_1y - l_2\dot{y} + r$ direkt i den ursprungliga modellen, $\ddot{y} = -\dot{y} - y + u = -\dot{y} - y - l_1y - l_2\dot{y} + r$. Laplacetransformering ger att slutna systemet ges av $Y(s) = \frac{1}{s^2+(l_2+1)s+(l_1+1)}R(s)$. Önskat polpolynom $p(s) = (s+5)^2 = s^2 + 10s + 25$ ger att $l_1 = 24$ och $l_2 = 9$.

5. (a) Polerna ges av -1, -10 samt -100 och det finns inga nollställen. Den statiska förstärkningen är $G(0) = 1.7$

(b) System kan ses som tre seriekopplade delsystem med väldigt olika tidskonstanter (1s, 0.1s, samt 0.01s). Polen i -1 är alltså en dominerande pol, och de två övriga polerna är mycket snabbare och dynamiken i dessa delsystem kan således bortses från. Viktigt att notera är dock att den sista termen i nämnaren ändrar den statiska förstärkningen med en faktor 10 som måste tas med. Vi skriver alltså $G(s) = \frac{17}{s+1} \cdot \frac{1}{.1s+1} \cdot \frac{0.1}{.01s+1}$ och använder approximationen $\hat{G}(s) = \frac{17}{s+1} \cdot 1 \cdot 0.1$

(c) $\lim_{t\to\infty} y(t)$ då $u(t) = c$ ges av $\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{c}{s} = G(0)c$. Vi löser alltså $7 = G(0)c$ och får $c = 7/1.7$.

(d) Från blockschema har vi $Y(s) = G(s)(V(s) + F(s)(R(s) - Y(s))$ vilket leder till $Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}V(s) + \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Överföringsfunktionen av intresse är alltså $\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$.

(e) Överföringsfunktionen från referenssignal $R(s)$ till reglerfel $E(s)$ ges av känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)}$. Vi har att $\lim_{t\to\infty} e(t)$ då $r(t) = c$ ges av $\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{c}{s} = S(0)c$. Således är $S(0) = 0.05$. Enligt ovan ges överföringsfunktionen från en insignalsstörning till utsignalen av $\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = G(s)S(s)$. Slutvärdesanalys m.a.p. givna insignalsstörningen ger $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)S(s)\frac{A}{s} = G(0)S(0)A = 1.7 \cdot 0.05A$. Påverkan blir alltså $1.7 \cdot 0.05\%$.