Lösningar till tentamen i TSRT19/23 Reglerteknik

Tentamensdatum: 9 januari 2023

1. (a) Vi vill värma mjölken till en viss temperatur, vilken vi kallar $r(t)$ (typiskt konstant, t.ex 80°). För att göra detta använder vi oss av någon värmekälla som vi kan justera, t.ex inställning på spisplatta eller en doppvärmare med pålagd spänning $u(t)$. För att sluta loopen och se hur mycket vi ska värma just nu så mäter vi nuvarande temperatur med någon slags temperatursensor vilket ger oss temperaturen $y(t)$.

   (b) En grundegenskap som vi använder genomgående är skalning (mer generellt superposition), dvs dubbelt så stor insignal leder till dubbelt så stor utsignal. Detta gäller definitivt inte för mjölken. Om en viss konstant effekt på uppvärmningen leder till mjölk som blir 80°, så kommer inte dubbelt så mycket effekt leda till mjölk som blir 160° Ett annat fenomen är att vi inte kan skapa negativa styrsignaler. Det minsta värdet på $u(t)$ vi kan få är 0 vilket motsvarar vilket motsvarar avstängning av värmekällan.

   (c) Om vi skriver i normaliserad form med dämpning och tidsskalning/resonansfrekvens $\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$ så har vi $G_1(s) = \frac{1^2}{s^2+2\cdot 1\cdot 1s+1^2}$, $G_2(s) = \frac{1^2}{s^2+2\cdot 0.05\cdot 1s+1^2}$, $G_3(s) = \frac{0.1^2}{s^2+2\cdot 0.05\cdot 0.1s+0.1^2}$ samt $G_4(s) = \frac{1^2}{s^2+2\cdot 0.05\cdot 1s+1^2}\frac{5^2}{s^2+2\cdot 0.01\cdot 5s+5^2}$. Med andra ord, $G_1(s)$ är väldigt väldämpat, vilket enbart kan kopplas till A som inte uppvisar några resonansfrekvenser. B uppvisar två resonansfrekvenser, vilket är rimligt att koppla till $G_4(s)$ som är en seriekoppling av två resonanta system. Kvarvarande resonanta system $G_2(s)$ och $G_3(s)$ där w_0 är 1 respektive 0.1 kopplas till D resp C med motsvarande resonansfrekvenser. Om du teoretiskt förklarar koppling mellan 3 av dem, och tar den fjärde på uteslutning är det godkänt också.

   (d) Gunnar har läst om underslängar, vilket kan uppträda i system som har nollställen i högra halvplanet.

2. (a) En PD-regulator

   (b) Slutna systemet från r till y ges av $\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{1+s}{s^2}}{1+\frac{1+s}{s^2}} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$. Slutna systemets poler ges av $s = -1/2 \pm \sqrt{1/4-1}$ dvs $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

   (c) Överföringsfunktion från referens till reglerfel ges av känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{s^2}{s^2+s+1}$ enligt $E(s) = S(s)R(s)$. Enligt slutvärdesteoremet gäller $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$ vilket med den linjärt växande referensen blir $\lim_{s\to 0} s\frac{s^2}{s^2+s+1}\frac{2\pi}{24}\frac{1}{s^2} = 0$

   (d) Överföringsfunktion från v till e blir $\frac{-G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{-1}{s^2+s+1}$. Analys behöver inte inbegripa både r och v då det är separata effekter och vi redan vet att r ej genererar något fel. Användning av slutvärdesteoremet med antagen konstant störning $V(s) = \frac{c}{s}$ leder oss till att felet som kommer från störningen kommer att bli $\lim_{s\to 0} s\frac{-1}{s^2+s+1}\frac{c}{s} = -c$

3. (a) Stegsvaret för ett system $G(s) = \frac{0.1}{sT+1}$ ges av $y(t) = 0.1(1-e^{-t/T})$. Vid t.ex tidpunkten 4 månader har vi $0.015 = 0.1(1-e^{-4/T})$. Från detta löser vi $T = \frac{4}{-\log(1-0.015/0.1)} \approx 24.6$

   (b) $|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2+1}}$ och $\arg G(i\omega) = -\arg(i\omega T+1) = -\arctan(\omega T)$. Från t.ex fasförskjutning för $\omega = 1$ får vi $1.107 = \arctan T$ dvs $T = \tan(1.107) = 2$. Från amplitudinformationen vet vi att signalen i samma frekvens förstärkts med 1.342, dvs $1.342 = K/\sqrt{2^2+1}$ vilket leder till $K = 3$.

   (c) Slutvärdesteorem (eller slutvärdessatsen) används för att uttala sig om vilket värde en signal går till, och typiskt användningsområde är att man frågar sig var utsignalen $y(t)$ går till, under antagandet att signalen är genererad via $Y(s) = G(s)U(s)$ där insignalen är $u(t) = 1$. För att kunna använda satsen krävs att $G(s)$ inte har några poler i högra halvplanet (dvs det får inte vara instabilt). Resultatet blir att utsignalen går mot $G(0)$. I ett Bodediagram kan man läsa av vad responsen blir för en konstant insignal eftersom $|G(0)|$ avslöjas. Om amplitudförstärkningskurvan är rak kommer den peka mot just värdet $|G(0)|$ på axeln. Om kurvan lutar nedåt (dvs minskar för minskande ω) så betyder det att $G(0) = 0$ vilket även det är slutvärdet enligt slutvärdesteoremet. Om den lutar uppåt (dvs ökar för minskande ω) så betyder det att $|G(0)| = \infty$ och att utsignalen således skulle divergera. En alternativ tolkning av Teos tankar är att han reflekterat över ett Bodediagram för en kretsförstärkning $G(s)F(s)$ och vad statiska reglerfelet blir när man har en konstant referens. Med slutvärdesteoremet så inser man att statiska reglerfelet bara kan bli 0 om amplitudförstärkningskurvan lutar uppåt, eftersom statiska reglerfelet är $\frac{1}{1+G(0)F(0)}$.

4. (a) Verifiering med standardformel

$$\begin{aligned}
C(sI-A)^{-1}B &= \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\left(sI - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/s & 0\\ 0 & 1/(s+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{s(s+1)}
\end{aligned}$$

(b) Med $L = \begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}$ får vi $A - BL = \begin{bmatrix}-l_1 & -l_2\\ l_1 & l_2 - 1\end{bmatrix}$ och $sI - (A - BL) = \begin{bmatrix}s + l_1 & l_2\\ -l_1 & s + 1 - l_2\end{bmatrix}$ med determinant $s^2 + s(1 - l_2 + l_1) + l_1$. Jämförelse med önskat polpolynom $(s+2)(s+100) = s^2 + 102s + 200$ ger $l_1 = 200$ och $l_2 = 99$.

(c) Om styrsignal $u = -l_1x_1 - l_2x_2 + r$ ändras till $u = -l_1x_1 - l_2 \cdot 0 + r$ så kan vi ekvivalent se det som att l_2 är 0 i återkopplingen. Sålunda är frågan om återkoppling $L = \begin{bmatrix}200 & 0\end{bmatrix}$ ger ett stabilt system. Vi har nu $A - BL = \begin{bmatrix}-200 & 0\\ 200 & -1\end{bmatrix}$ vilket ger stabilitet eftersom egenvärdena blir -1 och -200.

(d) Skriv på gemensamt bråk och gå tillbaka till signalform

$$\begin{aligned}
U_L(s) &= \frac{1}{J}\left(\frac{(n-1)s(s+1) + s + 1 + (r-n+1)s^2}{s(s+1)}\right)E(s)\\
U_L(s) &= \frac{1}{J}\left(\frac{rs^2 + ns + 1}{s(s+1)}\right)E(s)\\
J(s^2+s)U_L(s) &= (rs^2 + ns + 1)E(s)
\end{aligned}$$

Invers Laplce ger oss $J\ddot{u}_L + J\dot{u}_L = r\ddot{e} + n\dot{e} + e$

5. (a) Med P-regulator med $K_P = 1$ ges kretsförstärkningen $K_PG(s)$ av $G(s)$ vilken vi har Bodediagram för. I skärfrekvensen 3 rad/s ser fasen ut att vara precis mellan $-180°$ och $-135°$ så vi säger $157.5°$ vilket betyder att fasmarginalen är $22.5°$.

(b) Slutna systemets bandbredd är propertionell mot kretsförstärkningens skärfrekvens. Om vi minskar K_P kommer amplitudförstärkningskurvan för $K_PG(s)$ sjunka nedåt vilket betyder att den kommer skära förstärkningen 1 för en lägre frekvens, vilket betyder att skärfrekvensen minskar och således bandbredden

(c) Eftersom fasen inte påverkas av propertionalförstärkning betyder det att vi kan välja ett K_P som gör att skärfrekvensen hamnar så att vi precis undviker instabilitet. Vi ser att vi kan öka skärfrekvensen genom att öka K_P upp till ungefär 4 rad/s, men sedan blir fasmarginalen negativ.(Det är dock inte bra att öka skärfrekvensen ända upp hit, då en liten fasmarginal kommer ge dåliga egenskaper)

(d) Känslighetsfunktionen (då $K_P = 1$) ges av $S(s) = \frac{1}{1+G(s)}$. I den angivna frekvensen har vi att $arg(G(4i)) = -180°$ och $20\log|G(4i)| = -5$ dvs $|G(4i)| = 0.56$. Med fasinformationen får vi således att $G(4i) = -0.56$ och kan räkna ut $|S(4i)| = \frac{1}{|1-0.56|} = 2.27$.