Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT12 Reglerteknik

Tentamensdatum: 20 mars 2024

1. (a)
   - Poler i $s = -2$ och $s = -3$.
   - Nollställe i $s = 1$.
   - Systemet är ej minfas ty nollställe i höger halvplan.
   - Systemet är insignal-utsignalstabilt. Då följer av slutvärdesteoremet

   $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}\frac{1}{s} = -\frac{1}{6}$$

   - Enkel invers laplacetransform med t.ex. tabell ger

   $$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{u}(t) - u(t)$$

   - i. Felaktigt: RL kräver insamling av data från processen, så det tar normalt sett mer eller mindre tid innan systemets prestanda blivit tillräckligt bra. Det finns varianter (utanför den här kursen) där man tränar i en simulator, men eftersom simulatorn då typiskt bygger på en modell av något slag kan man inte längre se det som en modellfri metod.

     ii. Felaktigt: Framkoppling från störning bygger på en modell som beskriver hur störningen påverkar utsignalen.

     iii. Korrekt: Se avsnitt 9.5 i kursboken.

     iv. Felaktigt: Slutna systemet från r till y blir detsamma sånär som på en tidsfördröjning. D.v.s. man kommer inte undan från den tidsfördröjningen (så klart). Vidare kan känslighets- och robusthetsegenskaper ändras, se boken sid 148 och föreläsning.

2. (a) En inledande notering för att förstå vilken del av kurvan i nyquistdiagrammen som motsvarar de positiva frekvenser som plottas i bodediagrammen är att notera att samtliga amplitudkurvor går mot noll och alla utom bodediagram 1 börjar i oändligheten (och därmed rör sig mot origo för ökande positiv frekvens). Från detta följer att den relevanta halvan av kurvan i nyquistdiagrammen som kopplar mot bodediagrammet är den där pilen pekar *in mot origo*.

   - 1↔C: Bodediagram 1 och nyquistdiagram C är de enda med begränsad förstärkning för alla ω. Bode diagrammet är plant vid en konstant nivå för låga frekvenser istället för att luta.
   - 4↔A: Bodediagram 4 har en speciell faskurva, som börjar på $-90°$ närmare sig $-30°$ och sedan återgår mot $-90°$. Bodediagrammet som matchar detta är A.
   - 3↔B: Här är det bra att använda sig av den inledande observationen att vi vill ha den halvan av plotten där pilen pekar mot origo. Det betyder att det är den övre delen av nyquistdiagram B som är relevant, där är fasen för små frekvenser ca $-180°$ och kruvan närmar sig origo med argumentet ca $-270°$. Bodediagrammet som har en mathcande fas är bodeidragram 3.
   - 2↔D: Följer antingen genom uteslutning, eller ett resonemang snarlikt det för bodediagram B men med annat argument.

   (b)
   - Skärfrekvens: $0,57\,\text{rad/s}$.
   - Fasskärfrekvens: $1,73\,\text{rad/s}$.
   - En P-regulator kan bara "hissa" amplitudkurvan, d.v.s. gränsen går då vi nådd fasmarginal 0. Detta sker vid när skärfrekvensen ökats till $1,73\,\text{rad/s}$.
   - Tumregeln är att bandbredden hos det slutna systemet är ungefär skärfrekvensen hos det öppna systemet. Det ska tolkas som att de är av samma storleksordning, men approximativt kan man se dem som ungefär samma.

3. (a) Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

som uppenbarligen är inverterbar.

(b) Det slutna systemets egenvärden ges av

$$\det(sI - A + BL) = 0 = \det \begin{bmatrix} s + l_1 & l_2 - 1 \\ -1 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 + (l_1 - 2)s - 2l_1 + l_2 - 1 = 0.$$

För att placera polerna i -1 och -2 ska denna ekvation vara ekvivalent med

$$(s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2 = 0,$$

vilket uppnås för $l_1 = 5$ och $l_2 = 13$

(c) Observerbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

som också är inverterbar ($\det = 2$).

(d) Egenvärdena till skattningsfelets dynamik ges av

$$\det(sI - A + KC) = 0 = \det \begin{bmatrix} s + k_1 & k_1 - 1 \\ k_2 - 1 & s + k_2 - 2 \end{bmatrix} =$$
$$= s^2 + (k_2 + k_2 - 2)s - k_1 + k_2 - 1 = 0$$

För att placera polerna i -10 ska denna ekvation vara ekvivalent med

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100 = 0,$$

vilket ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 22 \\ k_2 - k_1 &= 101 \end{aligned}$$

vars lösning är $k_1 = -39.5$ och $k_2 = 61.5$.

4. (a) Med liknande notation som i kursboken så har vi

$$\Delta(s) = e^{-sT} - 1$$

d.v.s, $\Delta(i\omega) = \cos \omega T - 1 - i \sin \omega T$. Detta implicerar

$$|\Delta(i\omega)| = \sqrt{2 - 2\cos \omega T}$$

och speciellt

$$|\Delta(i\omega)| = \begin{cases} 0, & \text{when} \cos \omega T = 1 \\ 2, & \text{when} \cos \omega T = -1 \end{cases}$$

I figur 1, är $|\Delta(i\omega)|^{-1}$ plottat som en funktion av ωT.

(b) Robusthetskriteriet resulterar i

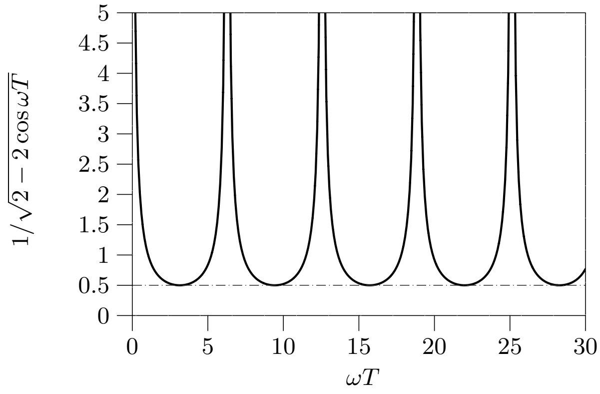
$$\forall \omega: \left| \frac{F(i\omega)G(i\omega)}{1 + F(i\omega)G(i\omega)} \right| < \frac{1}{|\Delta(i\omega)|}$$

Svaret följer därmed av figur 1.

Svar:

$$\left| \frac{F(i\omega)G(i\omega)}{1 + F(i\omega)G(i\omega)} \right| < \frac{1}{2}$$

(c) Det som ställer problem är sambandet $S + T = 1$. Om vi här väljer $F = 0$ så blir $T = 0$, vilket implicerar att $S = 1$. D.v.s. systemstörningar dämpas inte alls. Generellt sett finns det alltid en avvägning mellan litet S och litet T, d.v.s undertryckning av systemstörningar och mätstörningar/robusthet.



Figur 1:

5. (a) Ansätt tillstånden

$$x_1 = \varphi$$
$$x_2 = \dot{\varphi}$$

vilket direkt ger ekvationer

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_1 - \frac{1}{l}\ddot{z}$$

Detta ger tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/l \end{bmatrix} u$$

med $u = \ddot{z}$.

(b) Med $L = [l_1 \; l_2]$ ges den karakteristiska ekvationen av

$$0 = \det(sI - A + \alpha BL) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 - \alpha l_1 & s - \alpha l_2 \end{pmatrix} = s^2 - \alpha l_2 s - 1 - \alpha l_1.$$

(c) Det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt omm dess poler, givna av karakteristiska ekvationen ($0 = s^2 - \alpha l_2 s - 1 - \alpha l_1$), ligger i vhp. För ett andra ordningens polynom är detta ekvivalent med att alla koefficienter är positiva. Vi får således kravet att $-1 - \alpha l_1 > 0$. För den valda återkopplingen erhålls alltså stabilitet så länge som $\alpha > 1/2$.

(d) Se ekvationer (13) och (14) i RL-kompendiet. S-matrisen ges av

$$S = \begin{bmatrix} 0.64 & 1.13/2 \\ 1.13/2 & 4.27 \end{bmatrix}$$

Den optimala återkopplingen ges sen av

$$u_k = -S_{uu}^{-1} S_{ux} x_k$$

d.v.s. $L_{ny} = 1.13/(2 \cdot 4.27) = 0.132$.