Kortfattade lösningar till tentamen i TSRT12 Reglerteknik

Tentamensdatum: 18 augusti 2023

1. (a) Överföringsfunktionen för robotarmen är, med $J = 1$,

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

PD-regulatorns överföringsfunktion ges av

$$F(s) = K_P + K_D s$$

Det återkopplade systemes överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

och insättning och förenkling ger att det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$s^2 + K_D s + K_P = 0$$

vilket ger polerna

$$s = -K_D/2 \pm \sqrt{K_D^2/4 - K_P}$$

Polerna är reella när uttrycket under rottecknet är icke-negativt, d v s

$$K_D^2 \geq 4K_P$$

Svar: Det återkopplade systemets poler är reella för $K_D^2 \geq 4K_P$.

(b) Styrbarhetsmatrisen ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1-\beta \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, som har determinant $-(2+\beta) \neq 0$ då $\beta \neq -2$. Systemet är alltså styrbart om och endast om $\beta \neq -2$.

(c)
- Alternativ H kan uteslutas direkt, eftersom dessa poler ligger i höger halvplan.
- Stegsvarets översläng är ca 20 %, vilket gör att den relativa dämpningen är ca 0.3. Detta innebär att vinkeln mellan polernas läge och den negativa realaxeln är avsevärt större än 45°, vilket innebär att alternativen A, C, E och F kan uteslutas.
- För de återstående alternativen, d v s B, D och G, har polerna lika stor vinkel till negativa realaxeln, men avståndet är olika. Uttrycket för stegsvaret, se läroboken sid 37, innehåller en dämpad sinus med vinkelfrekvensen $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, och avläsning i figuren ger att vinkelfrekvensen är ca 4 rad/s. Från tidigare har vi att $\zeta \approx 0.3$, och tillsammans ger detta att polernas avstånd till origo är ca 4, vilket motsvarar alternativ D.

Svar: Alternativ D.

2. (a) Med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

och insignalen $u(t) = \sin 2t$ ges utsignalen av

$$y(t) =\mid G(i\omega) \mid \sin(2t + \phi)$$

där $\phi = argG(i\omega)$.

A Enligt ovan ges utsignalens amplitud av

$$\mid G(i\omega) \mid = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

och eftersom detta uttryck alltid är mindre är ett för $\omega > 0$ så kan inte kurvan i A vara utsignal till detta system.

B Insignalen har medelvärde noll medan signalen i B har medelvärde ett, vilket inte kan inträffa för detta system och denna insignal.

C Utsignalen har dubbelt så hög vinkelfrekvens som insignalen, vilket inte kan inträffa för ett system av detta slag.

(b) Utsignalen ges av

$$y(t) =\mid G(i\omega) \mid \sin(\omega t + \phi) =\mid G(i\omega) \mid \sin \omega(t + \phi/\omega)$$

där

$$G(s) = \frac{k}{s\tau + 1}$$

Signalernas periodtid är ca 3.1 sek, vilket ger vinkelfrekvensen $\omega = 2$ rad/s. Tidsskillnaden mellan in- och utsignal är ca -0.4 vilket ger

$$\phi/\omega = -0.4$$

och $\phi = -0.8$. Detta ger

$$\arg G(i \cdot 2) = -\arctan 2\tau = -0.8$$

som ger $\tau = 0.5$. Vidare ger figuren

$$\mid G(i \cdot 2) \mid = \frac{k}{\sqrt{(2\tau)^2 + 1}} = 1.4$$

och med insättning av τ enligt ovan ger detta $k = 2$.

Svar: $k = 2$ och $\tau = 0.5$.

(c)
- Figuren visar att systemet har statisk förstärkning ett, vilket gör att G_2 och G_3 kan uteslutas.
- Insättning av t.ex. $s = i \cdot 1$ ger att $|G_4(i \cdot 1)| = \frac{1}{2}$ vilket överensstämmer med det givna bodediagrammet.

Svar: G_4

(d) Ekvationssystemen behöver lösas för att räkna ut en skattning av parametrarna θ som sedan används för att beräkna en uppdaterad tillståndsåterkoppling. Ekvationssystemen är typiskt överbestämda. En approximativ lösning till dem beräknas med minstakvadratmetoden.

3. (a) För den övre delen ger figuren

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

vilket ger

$$sX_1(s) + X_1(s) = U(s)$$

Invers Laplacetransform ger

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$

För den undre delen fås

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}(U(s) + X_1(s))$$

vilket ger

$$sX_2(s) + 3X_2(s) = U(s) + X_1(s)$$

Invers Laplace ger

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + x_1(t) + u(t)$$

Vidare ger figuren

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

som ger

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

På matrisform ger detta

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) Med de angivna tillståndsvariablerna och den givna ekvationen fås sambanden

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

samt

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

På matrisform ger detta modellen i uppgiften.

(c) Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$, vilket i detta fall ger, med $m = 1$,

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

Matrisen egenvärden ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

vilket ger

$$\lambda^2 + \lambda l_2 + l_1 = 0$$

Med önskad polplacering fås den önskade karakeristiska ekvationen

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

vilket ger

$$l_1 = \omega_0^2 \quad l_2 = 2\zeta\omega_0$$

Återkopplingen blir

$$u(t) = -\omega_0^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_0 x_2(t) + l_0 r(t)$$

där l_0 väljs så att det återkopplade systemet får statisk förstärkning ett. Det återkopplade systemets överföringsfunktion ges av

$$G_C(s) = \frac{l_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

och kravet $G_C(0) = 1$ uppnås genom att välja $l_0 = \omega_0^2$.

Svar: Återkopplingen ges av

$$u(t) = -\omega_0^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_0 x_2(t) + \omega_0^2 r(t)$$

4. (a) Känslighetsfunktionen ges av, se exempelvis ekvation 3.22 i läroboken,

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

och med insättning av

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad F(s) = K$$

fås

$$S(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + K}$$

För $\omega = 1$ fås

$$\mid S(i) \mid = \frac{2}{K^2 + 4}$$

och kravet $\mid S(i) \mid \leq 0.1$ ger

$$K \geq \sqrt{396} \approx 19.9$$

Svar: $K \geq 19.9$.

(b) Det stationära reglerfelet när referenssignalen är ett enhetssteg anges felkoefficienten e_0 som ges av

$$e_0 = \frac{1}{1 + G_O(0)} = S(0)$$

där $G_O(s) = F(s)G(s)$. Med $F(s)$ och $G(s)$ enligt uppgiften fås

$$e_0 = \frac{1}{1 + K}$$

Svar: Det stationära reglerfelet ges av $1/(1 + K)$.

(c) Det återkopplade systemets egenvärden ges av ekvationen

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = 0$$

och med insatta matriser ger detta

$$\lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_1 + l_2) = 0$$

Detta ger följande egenvärde och egenskaper: (i): Egenvärden i $-1, -1$. Tillstånden svänger in utan oscillationer. (ii): $-1 \pm 2i$. Oscillativt beteende. (iii): Egenvärden i $-3.8, 1.8$. Instabilt. (iv): Egenvärden i $-1, -5$ Monoton insvängning, men snabbare än (i).

Svar: A - (iv), B - (iii), C - (ii), D - (i)

5. (a) Med givna värden ges det återkopplade systemets karakteristiska ekvation av

$$s^2 + 4s + 200K = 0$$

Genom att jämföra med den allmäna ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

fås

$$\omega_0 = \sqrt{200K}$$

Med kravet $\zeta = 1/\sqrt{2}$ fås

$$2\sqrt{200K}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

vilket ger $K = 0.04$.

Svar: $K = 0.04$

(b) Den karakteristiska ekvationen ges av

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{Kk_0}{\tau} = 0$$

vilket ger rötterna

$$s = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \frac{Kk_0}{\tau}}$$

För stora värden på K är uttrycket under rottecknet negativt, varvid rötterna blir komplexa med realdel $-\frac{1}{2\tau}$, som är negativ, d v s båda rötterna ligger i vänster halvplan.

För små värden på K är uttrycket under rottecknet positivt, varvid båda rötterna är reella. Båda rötterna ligger dock i vänster halvplan eftersom rotuttrycket är mindre än $\frac{1}{2\tau}$.

Svar: Nej, det återkopplade systemet är stabilt för alla $K > 0$.

(c) Genom att jämföra det allmänna uttrycket

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$$

med det aktuella fallet

$$G^0(s) = \frac{50(1+\alpha)}{s(0.25s+1)}$$

fås

$$\Delta G(s) = \alpha$$

Robusthetskriteriet

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \Delta G(i\omega) \mid}$$

ger därmed

$$\mid G_C(i\omega) \mid < \frac{1}{\mid \alpha \mid}$$

Enligt uppgiften vet vi att $\mid \alpha \mid \leq 0.5$, men eftersom det största värdet hos $\mid G_C(i\omega) \mid$ är ca 2.5 är inte kriteriet uppfyllt. Stabiliteten kan dock garanteras för $\mid \alpha \mid \leq 0.4$.

Svar: Nej. Stabiliteten kan dock garanteras för $\mid \alpha \mid \leq 0.4$