Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 22 mars 2023

1. (a) Efter att den transienta delen av utsignalen (den homogena delen av differentialekvationens lösning) gått mot noll ges den stationära utsignalen (partikulärlösningen) enlig "sinus in-sinus ut" som

$$y(t) = |G(5i)| \sin\big(5t + \arg G(5i)\big) \tag{1}$$

Enligt figuren har vi $|G(5i)| = 7 \cdot 10^{-1} = 0.7$ och $\arg G(5i) \approx -70° = -70° \cdot \frac{2\pi}{360°} \approx -1.2217\,\text{rad}$. Detta ger utsignalen $y(t) = 0.7 \sin(5t - 1.2217)$. Utsignalen blir förskjuten $\frac{\arg G(5i)}{5} \approx -0.2443\,\text{s}$, dvs ligger $-0.2443\,\text{s}$ efter insignalen. (3 p)

(b) $\alpha = \beta = 1$ ger

$$\dot{h}_A(t) = -h_A(t) + h_B(t) + u(t)$$
$$\dot{h}_B(t) = h_A(t) - 2h_B(t)$$

Via Laplacetransform ger detta ekvationerna

$$(s+1)H_A(s) = H_B(s) + U(s) \tag{2}$$

samt

$$H_B(s) = \frac{1}{s+2} H_A(s) \tag{3}$$

Tillsammans ger dessa

$$(s+1)H_A(s) = \frac{1}{s+2} H_A(s) + U(s) \tag{4}$$

Förenklingar ger sedan

$$H_A(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1} U(s) \tag{5}$$

(c) Bodediagram D har en resonanstopp, dock (betydligt) lägre än bodediagram B, dvs motsvarar ett stegsvar med mindre oscillationer: D – III, B – IV. System A har högre bandbredd, d v s kortare stigtid, än system C, A – II och C – I. (4 p)

2. (a) Styrsignalbegränsningar, modellfel och mätstörningar

(b) Återkopplingen ges av

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

med $L = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Det återkopplade systemet (slutna systemet) ges då av

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r(t)$$
$$y(t) = Cx(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} x(t)$$

Slutna systemets överföringsfunktion $G_c(s)$ kan beräknas från $G_c(s) = C(sI-(A-BL))^{-1}B$. Enklare är dock att notera att slutna systemet är på styrbar kanonisk form (se s. 147 i boken), vilket gör att $G_c(s)$ direkt kan skrivas upp som

$$G_c(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+4} = \frac{s+4}{(s+2)^2}$$

Svar: $G_c(s)$ har ett nollställe i $s=-4$ och två poler i $s=-2$.

(c) Integrerande del tar bort stationära fel. Vi kan därför para ihop A och D med (iii) och (iv) respektive B och C med (i) och (ii).

Skillnaden mellan (iii) och (iv) är att (iii) har en deriverande del, vilket dämpar oscillationer. Stegsvaret D har mindre oscillationer än A, vilket ger **A - iv** och **D - iii**.

Skillnaden mellan (i) och (ii) är att (i) har större I-del. Större I-del leder generellt till större oscillationer, vilket ger **B - ii** och **C - i**.

Svar: A - iv, B - ii, C - i, D - iii.

3. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation fås via överföringsfunktionen

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

vilket med

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad F(s) = K_p + K_d\frac{s}{1+sT}$$

ger

$$G_C(s) = \frac{s(K_pT+K_d)+K_p}{s^3T+s^2+s(K_pT+K_d)+K_p}$$

Den karakteristiska ekvationen är således

$$Ts^3+s^2+s(TK_p+K_d)+K_p = 0$$

om $T \neq 0$ och

$$s^2+sK_d+K_p = 0$$

om $T=0$.

(b) Ifall systemets poler ska vara placerade i -2 om $T=0$ så ska den karakteristiska ekvationen för systemet vara $(s+2)^2 = s^2+4s+4 = 0$. K_d och K_p kan därmed identifieras som $K_d = 4$ och $K_p = 4$.

(c) Med $\alpha = 1/T$ fås den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} s^3+\alpha s^2+(4+4\alpha)s+4\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow s^3+4s+\alpha(s^2+4s+4) &= 0 \end{aligned}$$

vilket innebär

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3+4s = s(s^2+4) = s(s-2i)(s+2i) \\ Q(s) &= s^2+4s+4 = (s+2)(s+2) \end{aligned}$$

(d) För små värden på α, d v s stort T har det återkopplade systemet två dåligt dämpade komplexkonjugerade poler samt en reell pol nära origo. För ökande α, d.v.s. minskande T rör sig de komplexkonjugerade polerna allt bättre dämpade och möts på negativa reella axeln. Därefter rör sig en utmed negativa reella axeln mot $-\infty$ och en rör sig mot (den dubbla) slutpunkten -2. Polen som startar i origo går åt vänster utmed negativa reella axeln mot slutpunkten i -2. Fallet när $\alpha \to \infty$ motsvarar alltså situationen då $T = 0$. Det återkopplade systemet är stabilt för alla $0 < \alpha < \infty$. Det är oscillativt för små värden på α, d.v.s. stora värden på T.

4. (a) Matrisen $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.01 \end{pmatrix}$ uppfyller att $\det \mathcal{S} \neq 0$ vilket medför att systemet är styrbart och polerna kan således placeras godtyckligt.

(b) $A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} (l_1\, l_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.1l_1 & -0.1 - 0.1l_2 \end{pmatrix}$. Polerna till det slutna system är givna av rötterna till den karaktäristiska ekvationen, $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -0.1l_1 & -0.1 - 0.1l_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (0.1 + 0.1l_2)\lambda + 0.1l_1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{0.1+0.1l_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(0.1+0.1l_2)^2}{4} - 0.1l_1}$. $\Rightarrow l_2 = \frac{2-0.1}{0.1} = 19, l_1 = \frac{\frac{(0.1+0.1l_2)^2}{4}}{0.1} = 10$. Med de funna värdena av l_1 och l_2 så kan det slutna systemet beräknas och dess statiska förstärkning. Välj l_0 till inversen av den statiska förstärkningen för det slutna systemet $l_0 = 1/|G_c(0)| = 10$.
Svar: $l_0 = 10,\ l_1 = 10,\ l_2 = 19$.

(c) $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uppfyller att $\det \mathcal{O} \neq 0$ och därmed är systemet observerbart. Observatörens poler kan således placeras godtyckligt. Ett bra val är att placera dess båda poler i -2 för att ge tillräcklig hastighet men ej för känslig mot brus.

(d) Vid valet att mäta hastighet blir $C = (0\ 1)$ och $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$ och därmed $\det \mathcal{O} = 0$. Systemet är inte observerbart, och det är därför bättre att mäta positionen y.

5. (a) Börja med att identifiera det relativa modellfelet

$$G^0(s) = G(s)\frac{\alpha}{(s+\alpha)} = G(s)\Bigg(1 + \underbrace{\frac{\alpha}{(s+\alpha)} - 1}_{\Delta(s)}\Bigg)$$

Då följer

$$\frac{1}{|\Delta(\mathrm{i}\omega)|} = \left|\frac{s+\alpha}{-s}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}{\omega} =: f(\omega)$$

Robusthetskriteriet $\forall\omega :\ |G_c(\mathrm{i}\omega)| < f(\omega)$ är uppfyllt om lågfrekvensasymptoten av $f(\omega)$ överkrider resonanstoppen vid $\omega = 2$, där $|G_c(\mathrm{i}2)| = 2$. Detta ger villkoret

$$\frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{2} > 2 \quad \overset{\alpha \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad \alpha > \sqrt{12}$$

Alltså: $\alpha > \sqrt{12}$.

(b) Robusthetskriteriet är tillräckligt men inte nödvändigt för stabilitet, d.v.s. om det *inte* är uppfyllt så kan man inte säga något om systemet är stabilt eller ej.

(c) Eftersom problemet har en styrsignal (alt. inser man att tillståndsrepresentationen kommer att ha två tillstånd (minimalt)) inses att $S_{uu} = 10$ och $S_{ux} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$. Därmed ges L_{ny} av $L_{\text{ny}} = S_{uu}^{-1} S_{ux} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) Vanlig LQ-reglering är modellbaserad vilket innebär att den fungerar direkt då den aktiveras (givet en tillräckligt bra modell så klart). Förstärkningsinlärning kommer att behöva en mer eller mindre lång period då den samlar in data och lär sig hur systemet ska regleras då systemet inte kommer att prestera bra, vilket i många tillämpningar inte är lämpligt/möjligt.