Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 10 juni 2022

1. - Det finns många olika svar, men ett möjligt är:

     Referenssignal avståndet vi vill ha till fordonet framför.

     Mätsignal det nuvarande avståndet till fordonet framför.

     Styrsignal position av gaspedalen.

   - $|G(3i)| = \frac{1}{\sqrt{13}}$ och $\arg G(3i) = -\arctan\frac{3}{2}$ ger att utsignalen går mot $4|G(3i)|4\sin(3t + \arg G(3i)) \approx 1.11\sin(3t - 0.98)$

   - Systemet är instabilt, alltså kan inte slutvärdessatsen användas. Från (A.33) fås att systemets stegsvar blir $y(t) = e^t - 1 \to \infty$ när $t \to \infty$.

   - Systemet kan ej förenklas, alltså är antalet poler detsamma som antalet tillstånd i en minimal realisation, dvs. fem.

   - En fundamental begränsning för ett reglersystem är att $S(s) + T(s) = 1$. Detta stämmer ej för mästeringenjörens reglersystem, vilket måste innebära att det har gjorts något fel.

2. (a)
   - Rotort 1: I detta fall får det slutna systemet endast reella poler, och en dominerande pol mellan 0 och -1. Rotorten kan därför svara mot antingen stegsvar a eller b eftersom dessa saknar oscillationer. Rotort 3 har också endast reella poler, men till skillnad från rotort 1 saknar den integrator i det öppna systemet vilket eliminerar det stationära felet. Slutsatsen blir därför att rotort 1 svarar mot stegsvar b.
   - Rotort 2: I detta fall får det slutna systemet komplexa poler för stora K, men systemet är stabilt för alla $K > 0$. Denna rotort måste därför svara mot stegsvar d som uppvisar avklingande oscillationer i stegsvaret för $K = 10$.
   - Rotort 3: Se kommentaren till rotort 1. Dessutom kan man notera att den lilla skillnaden mellan start- och slutpunkt för den dominerande polen gör att skillnaden i stigtid för olika K-värden är liten. Denna rotort måste därför svara mot stegsvar a.
   - Rotort 4: I detta fall kommer det slutna systemet att ha dominerande komplexa poler på imaginära axeln för något K-värde. Detta ger upphov till en svängning med konstant amplitud vilket kan ses för $K = 10$ i stegsvar c. Rotorten hör alltså till stegsvar c.

   (b) Om vi antar $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ och använder $F(s) = K$ så får vi slutna systemet $\frac{KN(s)}{D(s)+KN(s)}$. Rotorten är alltså ritad för karakteristiska ekvationen $D(s)+KN(s) = 0$. Startpunkterna är per definition rötterna till $D(s)$. System 1, 2 och 4 har en startpunkt i origo, dvs en pol i 0. Således ser $G(s)$ ut som $\frac{N(s)}{s\tilde{D}(s)}$ för dessa system, dvs. de har integralverkan. System med integralverkan som återkopplas med en

P-regulator har statisk förstärkning 1 oavsett val av förstärkning K. Syns enkelt i vår notation här med $G_c(0) = \frac{KN(0)}{0\tilde{D}(0)+KN(0)} = \frac{N(0)}{N(0)} = 1$

(c) Slutna systemet från $R(s)$ till $Y(s)$ ges av $\frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$. Insättning ger $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)+(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+6s+7}$ som har stabila rötter (notera att $(-s+1)$ förkortades bort)

Syrsignalen ges av $U(s) = F(s)(R(s) - G(s)U(s))$ ur vilket vi får $U(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)G(s)}R(s)$. Insättning ger $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(-s+1)(s^2+6s+7)}$. Det viktiga vi ser här är att vi har en instabil pol. Vid ett stegsvar kommer alltså styrsignalen att gå mot oändligheten. Det öppna systemet har ett problematiskt instabilt nollställe (som kan ge underslängar etc). I reglerdesignen har vi försökt trolla bort detta ur det slutna system genom att förkorta bort det i regulatorn. Det straffar sig dock uppenbarligen. I praktiken skulle man dessutom få ett instabilt stegsvar, eftersom vi aldrig vet polerna exakt, och när vi sedan försker förkorta bort systemets instabila pol, så kommer detta ej lyckas exakt.

3. (a)

$$G_c = \frac{FG}{1+FG} = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + (1+K_D)s + 1 + K_P}$$

Jämför med det önskade nämnarpolynomet: $(s+3/2)^2 = s^2 + 3s + 9/4$. Detta ger att $K_P = 5/4$ och $K_D = 2$.

(b) Nämnarpolynomet till det slutna systemet blir $s^2 + (1+K_D)s + K_P + 1/10$. Nollställena hamnar i $s = -(1+K_D)/2 \pm \sqrt{((1+K_D)/2)^2 - (1/10 + K_P)}$, dvs systemet är stabilt då kraven $K_D > -1$ och $K_P > -0.1$ är uppfyllda. Eftersom parametrarna i b-uppgiften uppfyller dessa krav kommer systemet fortfarande att vara stabilt.

(c) Tag fram tillståndsbeskrivning. Styrbar kanonisk form ger

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ ger slutna systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -(l_1+1) & -(l_2+1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Poler i $-3/2$ ger $(s+3/2)^2 = s^2 + 3s + 9/4$ och L kan lösas ut ur $l_1 + 1 = 3$ och $l_2 + 1 = 9/4$, dvs $L = \begin{pmatrix} 2 & 5/4 \end{pmatrix}$. (Samma regulator som PD-regulatorn i a) eftersom $x_1 = \dot{y}$, $x_2 = y$.)

4. (a) Avläsning i Bodediagrammet för öppna systemet ger:

$$\begin{aligned} A_m &= 5\,\mathrm{dB}, & \omega_p &= 9.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ \rho_m &= 30^\circ, & \omega_c &= 8.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \end{aligned}$$

(b) För att fördubbla reglerhastigheten måste ω_c ungefär fördubblas. Det kräver att förstärkningen ökar med $\sim$20 dB, vilket inte är möjligt med den nuvarande P-regulatorn eftersom $A_m < 20\,\mathrm{dB}$. Ett alternativ är att införa en D-del i regulatorn, vilket skulle förbättra stabilitetsegenskaperna och möjliggöra en ökning av förstärkningen.

(c) På grund av regulatorns struktur fås $T(s) = G_c(s)$. Från $G^0(s) = G(s)(1 - sT)$ fås att modellfelet blir $\Delta_G(s) = -sT$, vilket ger att $|\Delta_G(i\omega)| = \omega T$. Robusthetskriteriet ger därmed att vi kan garantera att systemet är stabilt om

$$\frac{1}{\omega T} > |G_c(i\omega)|.$$

Det mest begränsande värdet på $|G_c(i\omega)|$ antas vara magnitudtoppen på 9.4 dB vid frekvensen $8.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Från det fås

$$\frac{1}{8.8T} > 10^{\frac{9.4}{20}} \iff T < \frac{1}{10^{\frac{9.4}{20}} 8.8} \approx 0.039$$

(d) En tidsfördröjning på T sekunder ger en fasförskjutning på ωT i frekvensen ω. Det mest begränsande fallet fås då av fasmarginalen och skärfrekvensen.

$$\omega_c T < \frac{\pi}{6} \iff T < \frac{\pi}{6\omega_c} \approx 0.065$$

En alternativ lösning är att använda det approximativa uttrycket för tidsfördröjningen från 4.c. Det uttrycket leder däremot också till en förändring av förstärkningen, men det är rimligt att försumma den eftersom $\omega_c T$ är relativt liten.

5. (a) Polerna ges av

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Polerna beror ej på V.

(b) Det slutna systemets poler ges av

$$\begin{aligned} &\det(\lambda I - (A - BL)) = 0 \iff \\ &\begin{vmatrix} \lambda + Vl_1 & Vl_2 - 1 \\ \frac{V^2}{2}l_1 - 1 & \lambda + \frac{V^2}{2}l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{V^2}{2}l_2 + Vl_1\right)\lambda + \frac{V^2}{2}l_1 + Vl_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vill ha polerna i -2, -2 vilket innebär $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Identifiering ger att

$$l_1 = \frac{2(8 - 5V)}{(4 - V^2)V}$$
$$l_2 = \frac{4(5 - 2V)}{(4 - V^2)V}$$

Tillståndsåterkopplingen blir $u = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x$.

(c) l_1 och l_2 växer obegränsat då nämnaren går mot noll, dvs $V^* = 0$ eller $4 - (V^*)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V^* = 2$

(d) Det går inte att placera egenvärdena godtyckligt för systemet är inte styrbart. Styrbarhetsmatrisen är

$$S = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & \frac{V^2}{2} \\ \frac{V^2}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

och $\det S = V^2(1 - \frac{V^2}{4})$. Vi ser att $\det S = 0$ då $V = 0$ eller $V = 2$ vilket innebär att systemet inte är styrbart.

(e) Polpolynomet ges av $\lambda^2 + 2(l_1 + l_2)\lambda + 2(l_1 + l_2) - 1 = 0$ då $V = 2$. Låt det önskade polpolynomet vara $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Identifiering ger

$$\begin{cases} 2(l_1 + l_2) = a \\ 2(l_1 + l_2) = 1 + b \end{cases}$$

Det finns en lösning om båda högerleden är lika; detta uppfylls t.ex om $a = 2$ och $b = 1$. Det önskade polpolynomet ges då av $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ som har poler i $\lambda = -1$.

Den stabileserande återkopplingen har poler i -1 och ges av $l_1 + l_2 = 1$.