Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSRT12)

Tentamensdatum: 23 mars 2022

1. (a) $|G(7i)| = \frac{13}{\sqrt{8^2+7^2}} \approx 1.22$ och $\arg G(7i) = 0 - \arctan(7/8) \approx -0.72$ ger $y(t) \approx 1.22 \sin(7t - 0.72)$ efter transienter.

   (b) (A) – (III) – (VIII) P-reglering kräver inget minne vid implementering (eftersom man bara återkopplar nuvarande fel) men kan ge ett statiskt fel.
   (B) – (IV) – (VI) D-reglering införs för dämpa oscillationer men eftersom man ofta behöver uppskatta derivatan numeriskt blir det känsligt mot mätbrus.
   (C) – (II) – (VII) Framkoppling från referenssignalen kräver ingen sensor men kan inte hantera modellfel och/eller systemstörningar.
   (D) – (I) – (V) Observatör används för att kunna återkoppla tillstånd som inte direkt mäts men leder till en mer komplex regulator.

   (c) Värdefunktionen beskriver kostnaden av att befinna sig i ett visst tillstånd medan Q-funktionen beskriver kostnaden av att utföra en viss handling (och därefter den optimala policyn) i ett visst tillstånd.

   (d) Regulatorn kan ses som en diskret implementation av en I-del och kan ses som ett dynamiskt system $F(s) = 1/s$.

2. (a)
   - Kombinationerna (3) och (4) innehåller en I-del, vilka hör samman med diagrammen A och D vilka har statisk förstärkning ett. I (4) är I-delen större, vilket ger ett mera oscillativt återkopplat system, vilket motsvarar Bodediagram D som har högst resonanstopp.
   - För kombinationerna (1) och (2), vilka enbart har en P-del, ger ett större värde på K_P att det statiska förstärkningen för $G_c(s)$ blir närmare ett. Det innebär att (2) hör samman med B. Man ser ocks att det större värdet på K_P ger en resonanstopp i Bodediagrammet.

   (b)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s}$$

Det sluta systemet ges av

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} \\ &= \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s(s+1)^2 + K_P s + K_I + K_D s^2} = \\ &= \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (2 + K_D)s^2 + (1 + K_P)s + K_I} \end{aligned}$$

Den karakterisktiska ekvationen ges då av

$$s^3 + (2 + K_D)s^2 + (1 + K_P)s + K_I = 0$$

De tre koefficienterna $(2+K_D), (1+K_P)$ samt K_I kan väljas oberoende av varandra och således kan polerna placeras godtyckligt.

Svar: Den karakterisktiska ekvationen för det återkopplade systemet ges av $s^3 + (2 + K_D)s^2 + (1 + K_P)s + K_I = 0$. Polerna för det återkopplade systemet kan placeras godtyckligt.

(c) Känslighetsfunktionen $S(s)$ kan beräknas enligt

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s(s+1)^2}} = \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2 + K_D s^2 + K_P s + K_I}$$

För $K_I \neq 0$ gäller att

$$S(0) = \frac{0}{K_I} = 0$$

Alltså, om $K_I \neq 0$ är kravet $S(0) = 0$ uppfyllt oberoende av de övriga två regulatorparametrarnas värden.

Det andra kravet i uppgiften, dvs. att alla poler ska realdel mindre än eller lika med -1 uppfylls exempelvis om alla poler läggs i -1. Det ger att vi vill att den karakteristiska ekvationen ska vara

$$(s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$$

vilket fås med $K_P = 2, K_I = 1$ och $K_D = 1$.

Svar: En uppsättning regulatorparametrar som uppfyller kraven är t.ex. $K_P = 2, K_I = 1, K_D = 1$.

3. (a) Det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s)) = \frac{\alpha}{s + \alpha} G(s)$$

vilket ger att

$$\Delta G(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} - 1 = \frac{-s}{s + \alpha}$$

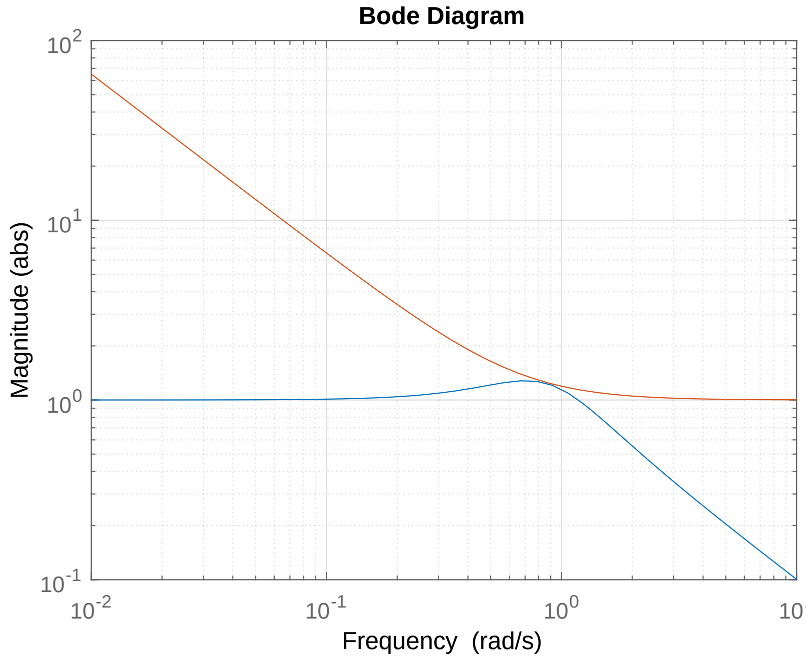
(b) Absolutbeloppet av det inversa modellfelet ges av

$$\frac{1}{|\Delta G(i\omega)|} = \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega}$$

Figuren visar denna kurva tillsammans med $|G_C(i\omega)|$ för $\alpha = 0.65$.

För att uppskatta vid vilket värde kurvorna tangerar varandra kan vi approximativt anta att den kritiska punkten är där $|G_C(i\omega)|$ är som störst. Detta inträffar vid $\omega = 0.8$ och där $|G_C(i\omega)| = 1.25$. Robusthetskriteriet

$$|G_C(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}$$



ger

$$1.25 < \frac{\sqrt{0.8^2 + \alpha^2}}{0.8}$$

vilket ger $\alpha > 0.6$. Det återkopplade systemet är alltså garanterat stabilt när $F(s)$ används på $G^0(s)$ om $\alpha > 0.6$. Robusthetskriteriet är ett tillrckligt, men ej nödvändigt, villkor, vilket innebär att det återkopplade systemet kan vara stabilt även för mindre värden på α.

(c) För små värden på α har det återkopplade systemet två poler i höger halvplan, dvs. det är instabilt. För ökande α närmar sig dessa poler vänster halvplan för att passera imaginäraxeln för $\alpha = \alpha_{rotort}$. För ännu större värden på α är alla poler i vänster halvplan, dvs. det återkopplade systemet är stabilt. Rotorten ger ett nödvändigt och tillräckligt villkor, vilket innebär att $\alpha_{rotort} \leq \alpha_{robust}$ gäller.

(d) När störningen kan mätas kan man använda sk. framkoppling, där man via en lämpligt vald överföringsfunktion låter mätningen av störningen direkt påverka styrsignalen. En begränsning i detta förfarande är att man behöver ha en tillräckligt bra modell av hur störningen påverkar systemet. Stabiliteten hos reglersystemet påverkas dock ej.

4. (a)

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{s}{10} + 1} U(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{y}(t) + 10y(t) = 10u(t)$$

Med tillståndsvalet $x = y$ fås

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -10x(t) + 10u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

(b) Praktiskt innebär observerbarhet att vi med hjälp av mätsignalen kan estimera alla tillstånd, vilket kräver att varje tillstånd påverkar mätsignalen på olika sätt.

(c) (9.32)-(9.33) ger att observatörens förstärkning fås av

$$K = PC^T R_2^{-1} \quad AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP = 0$$

där P ska vara positivt semidefinit. Med tillståndsmodellen i (a) fås

$$-20P + R_1 - \frac{P^2}{R_2} = 0 \implies P = -10R_2 \pm \sqrt{100R_2^2 + R_1 R_2}$$

där endast den positiva lösningen är giltig, vilket ger

$$K = \frac{P}{R_2} = -10 + \sqrt{100 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Observatören fås då av

$$\dot{\hat{x}}(t) = -10\hat{x}(t) + 10u(t) + K(y(t) - \hat{x}(t))$$

med K enligt ovan.

(d) Observatörens poler fås av egenvärdena av $A - KC$. För den framtagna observatören blir det

$$\text{eig}(A - KC) = \text{eig}\left(-10 + 10 - \sqrt{100 + \frac{R_1}{R_2}}\right) = -\sqrt{100 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Tidskonstanten är inversen till polens avstånd från origo, dvs.

$$T = \frac{1}{\sqrt{100 + \frac{R_1}{R_2}}}$$

Om vi tror att vi har mycket osäkerhet i mätningarna relativt modellen kommer R_2 vara stort relativt R_1. Då kommer observatörens hastighet, alltså T, vara låg.

5. (a) Blockschemat ger

$$Z(s) = V(s) + G(s)(F_r(s)R(s) - F_y(s)Z(s)) \iff$$
$$Z(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + G(s)F_y(s)}}_{S(s)} V(s) + \underbrace{\frac{G(s)F_r(s)}{1 + G(s)F_y(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

(b) Om det önskade slutna systemet ges av $G_m(s)$ fås

$$G_m(s) = \frac{G(s)F_r(s)}{1 + G(s)F_y(s)} \iff F_r(s) = \frac{1 + G(s)F_y(s)}{G(s)} G_m(s)$$

Detta innebär att vi kan forma det slutna systemet godtyckligt, och tillsammans med resultatet i (c) innebär det att $G_c(s)$ kan bestämmas helt separat från $S(s)$.

(c) Eftersom $S(s)$ inte innehåller $F_r(s)$ kan vi inte använda den för att forma $S(s)$. Praktiskt innebär det att en framkoppling från referenssignalen inte kan påverka systemets dämpning av en utsignalstörning. För denna regulator bestäms störningskänsligheten helt av återkopplingen $F_y(s)$.

(d) För en tillståndsåterkoppling från rekonstruerade tillstånd fås

$$
\begin{aligned}
u(t) &= l_0 r(t) - L\hat{x}(t) \\
\dot{\hat{x}}(t) &= (A - KC - BL)\hat{x} + Bl_0 r(t) + Ky(t)
\end{aligned}
$$

Dessa kan skrivas som överföringsfunktioner enligt

$$
\begin{aligned}
U(s) &= l_0 R(s) - L\hat{X}(s) \\
\hat{X}(t) &= (sI - A + KC + BL)^{-1}(Bl_0 R(s) + KY(s))
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
U(s) = l_0 R(s) - L(sI - A + KC + BL)^{-1}(Bl_0 R(s) + KY(s)) = \\
(1 - L(sI - A + KC + BL)^{-1}B)l_0 R(s) - L(sI - A + KC + BL)^{-1}KY(s)
\end{aligned}
$$

Identifiering ger då

$$
\begin{aligned}
F_r(s) &= (1 - L(sI - A + KC + BL)^{-1}B)l_0 \\
F_y(s) &= L(sI - A + KC)^{-1}K
\end{aligned}
$$