

# Lösningar till tentamen i Industriell reglerteknik TSRT07

Tentamensdatum: 2024-03-18

Martin Enqvist

1. (a) Z-transformering av differensekvationen som beskriver sambandet mellan in- och utsignalen ger överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{0.46z + 0.42}{z^2 - 1.78z + 0.78} = \frac{0.46z + 0.42}{(z-1)(z-0.78)}$$

mellan  $U(z)$  och  $Y(z)$ . Det tidsdiskreta systemet har polerna  $z = 1$  och  $z = 0.78$ . Vid exakt sampling av ett tidskontinuerligt system avbildas dess poler  $\lambda_i$  på  $e^{\lambda_i T_S}$ , där  $T_S$  är samplings-tiden. I detta fall måste därför polerna för det tidskontinuerliga systemet vara

$$s = \frac{\ln(1)}{1} = 0$$

och

$$s = \frac{\ln(0.78)}{1} \approx -0.25.$$

Den statiska förstärkningen är i detta fall oändlig eftersom systemet innehåller en integration.

- (b) Eftersom  $G(s)$  är ett första ordningens system utan tidsfördröjning kan vi använda en PI-regulator med IMC-trimning och trimningsparametern  $T_c = 2$  för att få ett slutet system med de önskade egenskaperna. Detta ger

$$K = \frac{T}{K_p T_c} = \frac{0.4}{4 \cdot 2} = 0.05 \quad \text{och} \quad T_i = T = 0.4.$$

- (c) Transformering med Tustins formel när  $T_S = 1$  s innebär att  $s$  byts ut mot  $2(z-1)/(z+1)$ . I-delen i en PID-regulator ger upphov till en pol i 1 medan D-delen ger upphov till en pol i  $-1$ . Eftersom  $F(z)$  endast har en pol i 1 måste den aktuella regulatorn vara en PI-regulator

$$\tilde{F}(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right).$$

Transformering med Tustins formel ger

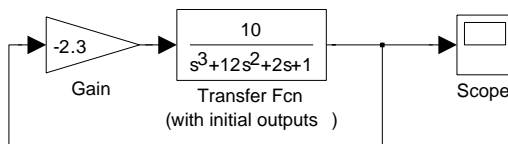
$$K \left( 1 + \frac{z+1}{2T_i(z-1)} \right) = \frac{(2KT_i + K)z - 2KT_i + K}{2T_i(z-1)}$$

och en jämförelse med  $F(z)$  ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \frac{2KT_i + K}{2T_i} &= 3.5 \\ \frac{-2KT_i + K}{2T_i} &= -0.5 \end{aligned}$$

som har lösningen  $K = 2$ ,  $T_i = 2/3$ . ( $T_d = 0$  eftersom D-delen saknas.)

2. (a) Självsvängningsexperimentet kan simuleras med hjälp av simulinkschemat som visas i figur 1.



Figur 1: Simulinkschema till uppgift 2(a).

Det visar sig att man får en självsvängning med kritisk periodtid  $T_u = 4.5$  vid den kritiska förstärkningen  $K_u = 2.3$ . Detta ger regulatorparametrarna

$$K = 1.38, \quad T_i = 2.25 \quad \text{och} \quad T_d = 0.563$$

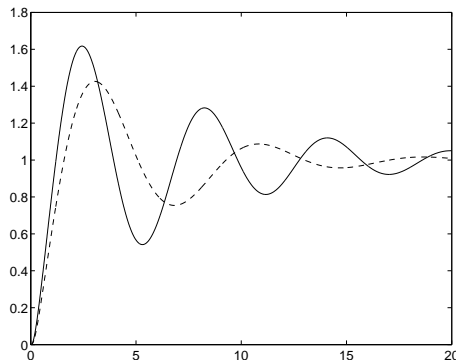
med Ziegler-Nichols inställningsregel och

$$K = 0.805, \quad T_i = 3.42 \quad \text{och} \quad T_d = 0.855$$

med metoden för specificering av punkt på nyquistkurvan. De resulterande slutna systemens stegsvar kan simuleras med hjälp av följande matlabkod:

```
G=tf(10,[1 12 2 1]);
Tu=4.5;
Ku=2.3;
mu=0.1;
K=0.6*Ku;
Ti=0.5*Tu;
Td=0.125*Tu;
F1=K*(tf([Ti 1],[Ti 0])+tf([Td 0],[mu*Td 1]));
K=0.35*Ku;
Ti=0.76*Tu;
Td=0.19*Tu;
F2=K*(tf([Ti 1],[Ti 0])+tf([Td 0],[mu*Td 1]));
Gc1=feedback(F1*G,1);
Gc2=feedback(F2*G,1);
step(Gc1,Gc2)
```

Stegsvaren för de båda slutna systemen visas i figur 2. Där kan man se att regulatorn som ställts in genom specificering av punkt på nyquistkurvan ger en mindre översläng än den där Ziegler-Nichols inställningsregel har använts.



Figur 2: Stegsvaret för det slutna systemet som fås med Ziegler-Nichols inställningsregel (heldraget) och det som fås genom specificering av punkt på nyquistkurvan (streckat) i uppgift 2(a).

- (b) De båda inställningarna från uppgift 2(a) ger PID-regulatorer med komplexa nollställen,  $-0.83 \pm 0.18i$  med Ziegler-Nichols inställningsregel och  $-0.54 \pm 0.12i$  med specificering av punkt på nyquistkurvan. Ingen av dessa inställningar kan därför användas i en PID-regulator som är implementerad på serieform eftersom en sådan bara kan ha reella nollställen. Matlabkod:

```
zero(F1)
zero(F2)
```

3. (a) Vi kan använda en ideal framkoppling med

$$F_f(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)} = \frac{0.006(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{s^3 + 0.6s^2 + 0.11s + 0.006}$$

i detta fall. Regulatorn definieras av  $F_f(s)$ ,  $G_m(s)$  och PI-regulatorns överföringsfunktion

$$F(s) = 1 + \frac{1}{2.5s}.$$

- (b) Exakt sampling av  $G(s)$  ger den tidsdiskreta överföringsfunktionen

$$G_d(z) = \frac{0.001148z^2 + 0.003957z + 0.0008508}{z^3 - 2.456z^2 + 2.011z - 0.5488}$$

som har nollställen i  $-3.22$  och  $-0.230$ . Matlab-kod:

```
G=tf(1,[1 3 3 1]);
Gd=c2d(G,.2)
zero(Gd)
```

- (c) I metod (i) tar man fram tidsdiskreta approximationer av  $F_f(s)$  och  $G_m(s)$  med Tustins formel (eller någon annan översättningsmetod). Dessa tidsdiskreta överföringsfunktioner kan sedan användas i den tidsdiskreta regulatorn på samma sätt som  $F_f(s)$  och  $G_m(s)$  används i den tidskontinuerliga.

I metod (ii) måste man börja med att ta fram en tidsdiskret motsvarighet  $G_{m,d}(z)$  till  $G_m(s)$ . Detta är dock rättfram att göra antingen genom exakt sampling om man antar att referenssignalen är styckvis konstant eller med Tustins formel. I det senare fallet får dock  $G_{m,d}(z)$  relativt gradtal noll medan  $G_d(z)$  har relativt gradtal ett. För att de relativa gradtalen ska bli lika måste man därför inkludera en extra pol i  $G_{m,d}(z)$  utan att ändra dess egenskaper för mycket. Detta slipper man om tidsdiskretiseringen av  $G_m(s)$  sker med exakt sampling. Nästa steg är att beräkna den tidsdiskreta framkopplingen  $F_{f,d}(z)$  som om man vill ha en ideal framkoppling ska vara lika med kvoten mellan  $G_{m,d}(z)$  och  $G_d(z)$ . Den tidsdiskreta modellen  $G_d(z)$  har dock ett nollställe i  $z = -3.22$ , det vill säga utanför enhetscirkeln (icke-minfas), och  $1/G_d(z)$  är därför inte en stabil överföringsfunktion. För att  $F_f(z)$  ska bli stabil måste vi därför se till att faktorn  $(z + 3.22)$  ingår i  $G_{m,d}(z)$ , vilket den inte gör från början. Genom att lägga till en faktor

$$H(z) = \frac{(1+a)(z+3.22)}{(1+3.22)(z+a)},$$

med ett lämpligt val av  $a$ , kan man ta fram en alternativ tidsdiskret referensmodell  $\tilde{G}_{m,d}(z) = G_{m,d}(z)H(z)$  som har ungefär samma stegsvar som  $G_{m,d}(z)$  men som gör att

$$F_{f,d}(z) = \frac{\tilde{G}_{m,d}(z)}{G_d(z)}$$

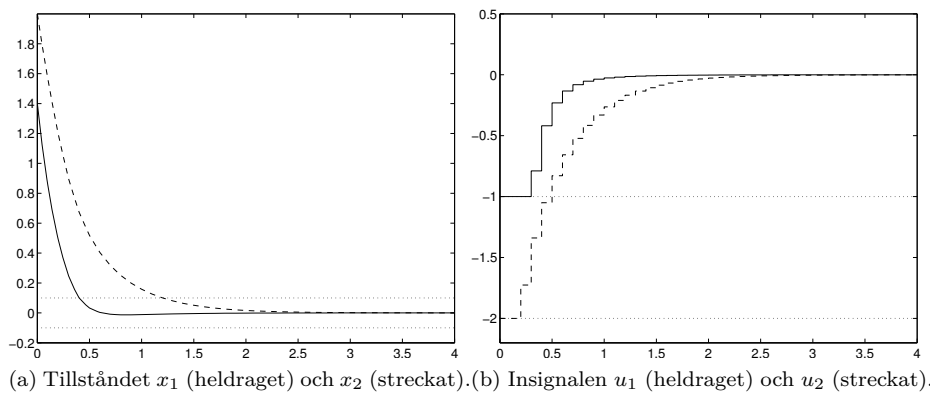
blir stabil och kausal. Överföringsfunktionerna  $F_{f,d}(z)$  och  $\tilde{G}_{m,d}(z)$  kan sedan användas i den tidsdiskreta regulatorn på samma sätt som  $F_f(s)$  och  $G_m(s)$  används i den tidskontinuerliga.

Eftersom den exakta samplingen av  $G(s)$  ger upphov till ett icke-minfas-nollställe som sedan måste hanteras vid designen av framkopplingen i diskret tid i metod (ii) är metod (i) enklast att använda i det aktuella fallet. (Metoderna kommer dock att ge framkopplingar med mycket snarlika egenskaper.)

4. (a) Man kan till exempel välja regulatorparametrarna  $N = 20$ ,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

och  $Q_2 = I$ . Plottar som visar att det slutna systemet uppfyller de ställda kraven visas i figur 3.



Figur 3: Plottar som visar att designkraven i uppgift 4(a) är uppfyllda.

Matlab-kod:

```

A=[-4 0 ; -1 -0.4];
B=[1 0; 0.5 1];
C=eye(2);
D=zeros(2,2);
Gsys=ss(A,B,C,D);
M=eye(2);
x0=[1.4;2.0];
Ts=.1;
Gsysd=c2d(Gsys,Ts);
F=Gsysd.A;
G=Gsysd.B;
N=20;
Q1=diag([35 5]);
Q2=diag([1 1]);
ubounds=[-1 1;-2 2];

```

- (b) Vid överordnad MPC-reglering måste modellen som används internt i MPC-regulatorn både innehålla en beskrivning av de enklare regulatorernas funktion och en beskrivning av det styrda systemet. MPC-regulatorn ställer i detta fall ut referenssignaler till de enklare regulatorerna. Bivillkor på styrsignalerna kan hanteras även vid överordnad MPC-reglering men inte riktigt på samma sätt som i fallet med enbart MPC-reglering. Eftersom MPC-regulatorn inte beräknar styrsignalerna direkt måste man ta fram prediktioner av de egentliga styrsignalerna utifrån den aktuella tillståndsmätningen och de framräknade referenssignalvärdena. Styrsignalbivillkoren kan sedan formuleras för dessa predikterade styrsignaler och sedan skrivas om som bivillkor på referenssignalerna som man optimerar över i MPC-regulatorn.
5. Eftersom vi vill att styrsignalen  $u_1$  i stationärt tillstånd ska ligga mitt i sitt arbetsområde ska referenssignalen  $r_u$  alltid vara lika med mittvärdet, som i det här fallet är 0. Vid ett enhetssteg i referenssignalen  $r$  kommer styrsignalen  $u_1$  initialt att bli 1, vilket gör att vi precis undviker mättning. Det initiala reglerfelet som skickas in i  $F_2(s)$  är därför  $-1$  och om vi väljer förstärkningen  $K$  i  $F_2(s)$  till  $-1$  kommer styrsignalen  $u_2$  initialt att bli 1, vilket gör att vi även här precis undviker mättning. Om vi hade valt en trimning så att vi får mättade styrsignaler skulle vi ha behövt införa hantering av integratoruppvridning för att få rättvisande simuleringar. Parametern  $K$  ska vara negativ eftersom systemet från  $u_2$  till  $u_1$  har omvänt tecken så att ett ökat  $u_2$  så småningom ger ett minskat  $u_1$ .

Som visas i figur 4 så kan stegsvaret för överföringsfunktionen

$$G_{u_2 u_1}(s) = -\frac{G_2(s)}{G_1(s)}G_{c,1}(s)$$

från  $u_2$  till  $u_1$  approximeras ganska väl med stegsvaret från

$$\hat{G}(s) = \frac{-5}{30s + 1}.$$

Parametrarna i PI-regulatorn  $F_2(s)$  kan till exempel väljas med hjälp av lambdatrimning med  $\lambda = 0.2$  vilket ger

$$F_2(s) = -1 - \frac{1}{30s}.$$

Framkopplingen i den andra mitthållningsregulatorn ska väljas som

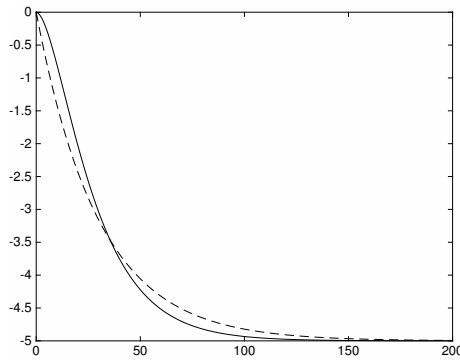
$$F_f(s) = -\frac{G_2(s)}{G_1(s)} = \frac{-5(0.5s + 1)}{200s^2 + 30s + 1}$$

för att bidraget från  $u_2$  till  $y$  ska bli noll. Matlabkod:

```

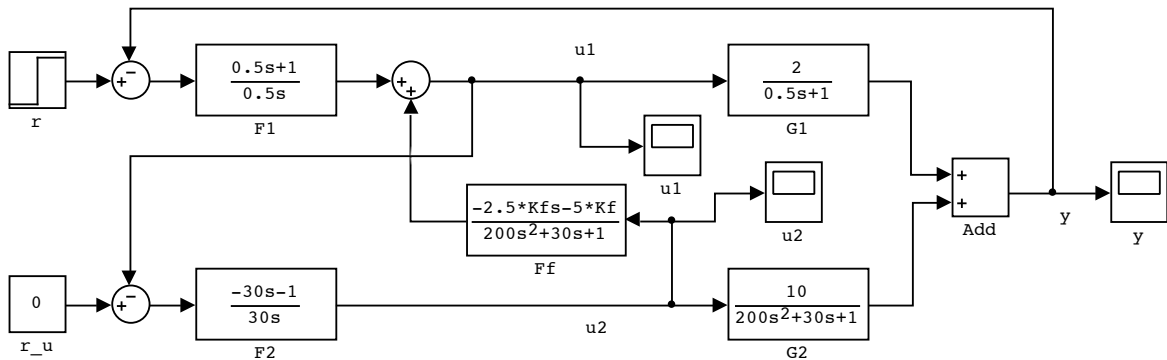
G1=tf(2,[.5 1]);
G2=tf(10,[200 30 1]);
F1=tf([.5 1],[.5 0]);
Gc1=feedback(G1*F1,1);
Gu1u2=minreal(-G2*Gc1/G1);
Ghat=tf(-5,[30 1]);
step(Gu1u2,Ghat)
lambda=0.2;
K=1/(-5*lambda)
Ti=30
F2=tf([-30 -1],[30 0]);
Ff=-G2/G1

```



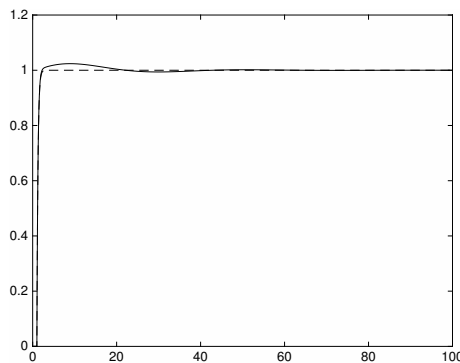
Figur 4: Stegsvär för  $G_{u_2u_1}(s)$  (heldraget) och  $\hat{G}(s)$  (streckat) i uppgift 5.

Ett simulinkschema som kan användas för att simulera mitthållningsregulatorn utan och med framkoppling visas i figur 5. Parameter  $K_f$  ska sättas till 0 respektive 1 vid simuleringarna och referenssignalen är ett enhetssteg vid tiden 1 s. Eftersom vi har valt regulatorparametrar som gör att styrsignalerna inte mätts vid ett enhetssteg i referenssignalen finns det inte några olinjära mättningsblock i simulinkschemat. Sådana block och funktioner för hantering av integratoruppvridning skulle behöva införas för att få rättvisande resultat om regulatorerna ger styrsignaler utanför det tillåtna intervallet.



Figur 5: Simulinkschema till uppgift 5.

Stegsvaren för de båda slutna systemen visas i figur 6. Som man kan se där eliminerar den interna framkopplingen de negativa effekter som man annars får på reglerprestandan.



Figur 6: Stegsvär för det slutna systemet som fås med en mitthållningsregulator utan (heldraget) respektive med (streckat) intern framkoppling i uppgift 5.