Lösningar till tentamen i Industriell reglerteknik TSRT07

Tentamensdatum: 2022-03-21

Martin Enqvist

1. (a) Eftersom tillståndsbeskrivningen är både styr- och observerbar ges systemets poler av A-matrisens egenvärden, det vill säga av ekvationen

$$\det(sI - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s - a_1)(s - a_3) = 0.$$

Det tidskontinuerliga systemet har alltså poler i $s = a_1$ och $s = a_3$. Vid exakt sampling av en tidskontinuerlig systembeskrivning avbildas en tidskontinuerlig pol λ på $e^{\lambda T_S}$. I detta fall får alltså det tidsdiskreta systemet poler i $e^{a_1 T_S}$ och $e^{a_3 T_S}$.

(b) Med en ideal inre loop (som gör att $z(t)$ alltid är lika med utsignalen $z_r(t)$ från $F_1(s)$) får man det slutna systemet

$$G_{c,ideal}(s) = \frac{F_1(s)G_1(s)}{1 + F_1(s)G_1(s)} = \frac{20s + 1}{200s^2 + 40s + 1},$$

där $G_1(s)$ är överföringsfunktionen mellan $z(t)$ och $y(t)$. Polerna till $G_{c,ideal}(s)$ ligger i -0.171 och -0.0293. Genom att beräkna polerna för det inre slutna systemet och kan man kontrollera vilket alternativ som ger en inre loop som är klart snabbare än den yttre. Alternativ (i) ger poler i -8.06, -5.92 och -0.0210 och förkastas på grund av den sista, relativt långsamma, polen. Alternativ (iii) ger ett instabilt slutet system och förkastas därför. Det bästa alternativet är (ii) som ger ett relativt snabbt inre slutet system med poler i -9.50 och $-2.25 \pm 0.452i$. Matlab-kod:

```
G1=tf(1,[10 1]);
F1=tf([20 1],[20 0]);

Gcideal=feedback(F1*G1,1)
pole(Gcideal)

G2=tf(10,[1 14 48 0]);
Gc2i=feedback(0.1*G2,1);
pole(Gc2i)
Gc2ii=feedback(5*G2,1);
pole(Gc2ii)
Gc2iii=feedback(100*G2,1);
pole(Gc2iii)
```

(c) Vid överordnad MPC-reglering måste modellen som används internt i MPC-regulatorn både innehålla en beskrivning av de enklare regulatorernas funktion och en beskrivning av det styrda systemet. MPC-regulatorn ställer i detta fall ut referenssignaler till de enklare regulatorerna. Bivillkor på styrsignalerna kan hanteras även vid överordnad MPC-reglering men inte riktigt på samma sätt som i fallet med enbart MPC-reglering. Eftersom MPC-regulatorn inte beräknar styrsignalerna direkt måste man ta fram prediktioner av de egentliga styrsignalerna utifrån den aktuella tillståndsmätningen och de framräknade referenssignalvärdena. Styrsignalbivillkoren kan sedan formuleras för dessa predikterade styrsignaler och sedan skrivas om som bivillkor på referenssignalerna som man optimerar över i MPC-regulatorn.

2. (a) Genom att rita upp stegsvaret för systemet kan man bestämma modellparametrarna L, K_p och T enligt följande principer.

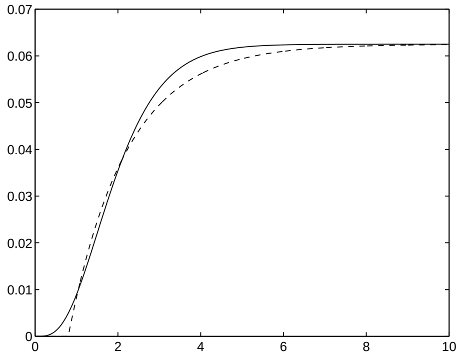
   * Dödtiden L är den tid under vilken stegsvaret (ungefär) är lika med noll.
   * Den statiska förstärkningen K_p är det värde som stegsvaret närmar sig när tiden går mot oändligheten.
   * Tidskonstanten T väljs så att systemets och modellens stegsvar båda (ungefär) har värdet $0.63K_p$ vid tidpunkten $L + T$.

Systemets och modellens stegsvar visas i figur 1.

Treparametermodellen blir

$$\hat{G}(s) = \frac{0.0625}{1.4s + 1} e^{-0.8s},$$

vilket ger regulatorparametrararna $K = 5.6$ och $T_i = 0.98$. Matlab-kod:



Figur 1: Stegsvaret för systemet (heldraget) och treparametermodellen (streckat) i uppgift 2(a).

```
Gtmp=tf(1,[1 2]);
G=Gtmp^4;
Kp=0.0625;
T=1.4;
L=0.8;
Ghat=tf(Kp,[T 1],'InputDelay',L);
step(G,Ghat)
a=Kp*L/T;
K=0.2/a;
Ti=0.7*T;
```

(b) Den neutrala framkopplingen ges av överföringsfunktionerna

$$G_m(s) = \frac{1}{1.4s+1} e^{-0.8s}$$

och $F_f(s) = G_m(s)/\hat{G}(s) = 16$. Regulatorn definieras av $G_m(s)$, $F_f(s)$ samt PI-regulatorn $F(s)$ från föregående deluppgift.

(c) Vid framkoppling från referenssignalen är det viktigare att man har en noggrann modell än vid återkoppling eftersom framkopplingstermen beräknas enbart utifrån referenssignalen och modellen. Vid återkoppling justeras däremot styrsignalen baserat på mätningarna av utsignalen och därmed blir en återkoppling inte lika känslig för modellfel.

3. (a) Systemets överföringsfunktion kan beräknas med matlabkommandona

```
G=ss([-2 -2;2 0],[2; 0],[-0.5 1],0);
G=tf(G)
```

och resultatet är

$$G(s) = \frac{-s+4}{s^2+2s+4}.$$

Eftersom systemet har ett ickeminfasnollställe i $s = 4$ är det olämpligt att välja referensmodellen

$$G_m(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Med detta val av $G_m(s)$ skulle man nämligen behöva använda en approximativ framkopplingslänk, vilket kan ge upphov till överslängar i det slutna systemets stegsvar. Ett bättre val av referensmodell är

$$G_m(s) = \frac{(-s+4)}{4(T_c s+1)^2},$$

där T_c är en parameter med vilken man kan ställa in den önskade snabbheten i referensföljningen. Med $T_c = 0.37$ blir G_m:s stegsvar 0.63 vid tiden 1 s. Regulatorn definieras av överföringsfunktionerna $F(s)$,

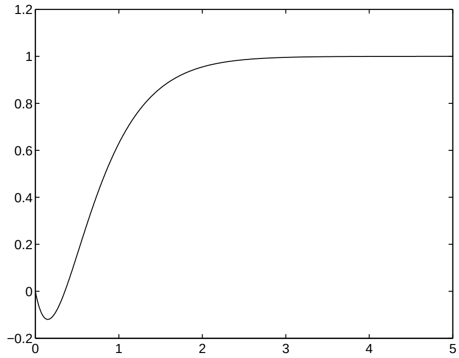
$$G_m(s) = \frac{(-s+4)}{4(T_c s+1)^2},$$

och

$$F_f(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)} = \frac{s^2+2s+4}{4(T_c s+1)^2}.$$

Stegsvaret för det slutna systemet visas i figur 2. Matlab-kod:

```
F=tf(0.5*[1 1],[1 0]);
Tc=0.37;
Gm=tf([-1 4],4*[Tc^2 2*Tc 1]);
Ff=tf([1 2 4],4*[Tc^2 2*Tc 1]);
Gry=minreal((G*F*Gm+G*Ff)/(1+G*F));
step(Gry)
```



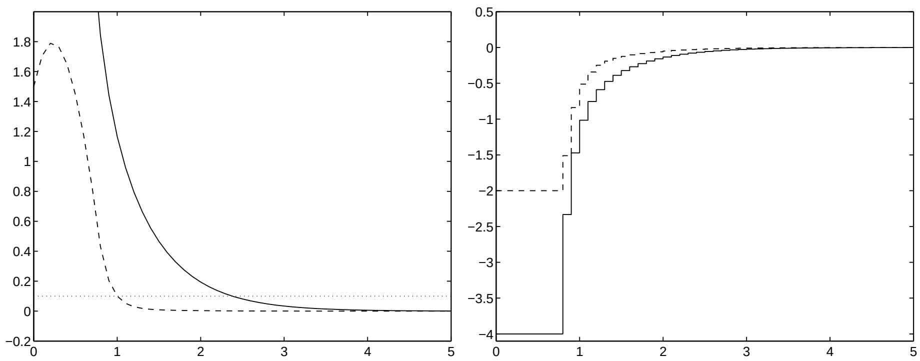
Figur 2: Stegsvar för det slutna systemet i uppgift 3(a).

(b) Ickeminfasnollstället i systemet gör att man inte kan välja en godtycklig referensmodell och samtidigt använda ideal framkoppling. Antingen måste nollstället ingå i referensmodellen eller så måste man använda en approximativ framkopplingslänk.

4. (a) Man kan till exempel välja regulatorparametrarna $N = 20$,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 34 \end{pmatrix}$$

och $Q_2 = I$. Plottar som visar att det slutna systemet uppfyller de ställda kraven visas i figur 3.



(a) Tillståndet x_1 (heldraget) och x_2 (streckat). (b) Insignalen u_1 (heldraget) och u_2 (streckat).

Figur 3: Plottar som visar att designkraven i uppgift 4(a) är uppfyllda.

Matlab-kod:

```
A=[-1 0 ; 1 -0.2];
B=[1 0; 1 1];
C=eye(2);
D=zeros(2,2);
Gsys=ss(A,B,C,D);
M=eye(2);
x0=[9.0 1.5]';
Ts=.1;
Gsysd=c2d(Gsys,Ts);
F=Gsysd.A;
G=Gsysd.B;
N=20;
```

```
Q1=diag([1 34]);
Q2=diag([1 1]);
ubounds=[-4 4;-2 2];
```

(b) Det aktuella systemet är en dubbelintegrator och skulle kunna svara mot en enhetsmassa som rör sig utan friktion under inverkan av en drivande kraft. Metoden med sluttillståndsbivillkor innebär att regulatorn måste ta systemet till origo på N tidssteg, vilket i det här fallet svarar mot $NT_S = 4\,\mathrm{s}$. Eftersom styrsignalen är begränsad kommer det inte att vara möjligt om $|y_0|$ är för stor och i ett sådant fall kommer det initiala MPC-problemet att sakna lösning. Med de aktuella tillstånden svarar $x(k+N) = 0$ mot att både hastighet och position ska vara noll efter $4\,\mathrm{s}$. Om y_0 är positiv är det snabbaste sättet att ta sig till origo att först ställa ut $u = -2$ en viss tid och sedan $u = 2$ under lika lång tid. Med $\dot{y}(0) = 0$ och $u = -2$ under $2\,\mathrm{s}$ får man en förändring i y på $-2^2 = -4$ och det största värdet på $|y_0|$ för vilket man har en lösning är alltså 8.

5. (a) Den tidsdiskreta överföringsfunktionen $F_d(z)$ fås om man byter ut s mot $(z-1)/z$ i $F(s)$. Detta ger

$$F_d(z) = \frac{z^2 - z - z^2}{(z-1)^2 - 2(z^2 - z) + 5z^2} = \frac{-z}{z^2 - 2z + 1 - 2z^2 + 2z + 5z^2} = \frac{-z}{4z^2 + 1}.$$

Polerna till $F(s)$ ligger i $1 \pm 2i$, det vill säga i höger halvplan, medan polerna till $F_d(z)$ ligger i $\pm 0.5i$, det vill säga innanför enhetscirkeln. Det betyder att $F(s)$ är en instabil överföringsfunktion medan $F_d(z)$ är stabil.

(b) En cirkel i z-planet beskrivs av ekvationen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{1}$$

där $z = x + iy$. Eulers metod svarar mot avbildningen $z = \frac{1}{1-sT_S}$, och punkterna $s = 0$ och $s = \pm i/T_S$ avbildas på $z = 1$ och $z = (1 \pm i)/2$. Om man sätter in dessa punkter i (1) får man ekvationssystemet

$$\begin{aligned}(1-a)^2 + b^2 &= r^2,\\ (0.5-a)^2 + (0.5-b)^2 &= r^2,\\ (0.5-a)^2 + (-0.5-b)^2 &= r^2,\end{aligned}$$

som har lösningen $a = 0.5$, $b = 0$ och $r = 0.5$. Cirkelns mittpunkt är alltså $z = 0.5$ och dess radie är 0.5. En godtycklig punkt $s = i\omega$ på den imaginära axeln avbildas på $z = 1/(1 - i\omega T_S)$ och avståndet från denna punkt till $z = 0.5$ är

$$\left|\frac{1}{1 - i\omega T_S} - 0.5\right| = 0.5\left|\frac{1 + i\omega T_S}{1 - i\omega T_S}\right| = 0.5.$$

Punkter på den imaginära axeln avbildas alltså på en cirkel med mittpunkt $z = 0.5$ och radie 0.5 i z-planet.

(c) En godtycklig punkt i vänster halvplan, $s = \frac{\alpha + i\beta}{T_S}$ med $\alpha < 0$, avbildas på $z = \frac{1}{1-\alpha-i\beta}$. Avståndet från denna punkt till $z = 0.5$ är

$$\left|\frac{1}{1 - \alpha - i\beta} - 0.5\right| = 0.5\frac{\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} < 0.5$$

eftersom α är negativ. Punkter i vänster halvplan avbildas alltså på det inre av cirkeln från föregående deluppgift.