Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik fk, M (tsrt06) 2025-10-25

1. (a) Stationära punkter ges av lösning till $x_1+x_2 = 1, 3\sqrt{x_2} = x_1$. Låt $\sqrt{x_2} = v$ och lös $3v+v^2 = 1$ vilket ger $x_2 = 0.09$ och $x_1 = 0.91$. Jacobian ges av

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -\frac{u_0}{2\sqrt{x_2}} \end{pmatrix}$$

Vi får i den stationära punkten

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

vilket ger egenvärden -1.27, -4.73, d v s stabil stationär punkt.

(b)

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + u_1(t) - u_2(t)$$

Laplacetransformering ger:

$$(s+\alpha)Y(s) = U_1(s) + U_2(s) \;\Rightarrow\; Y(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & \frac{-1}{s+\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & \frac{-1}{s+\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow G(0) = \begin{pmatrix} 100 & -100 \end{pmatrix}$$

Singulärvärdena till $G(0)$ ges av roten ur egenvärdena till $G(0)^*G(0)$.

$$\det\{\lambda I - G(0)^*G(0)\} = \lambda^2 - 2 \cdot 10^4\lambda$$

d v s de singulära värdena är 0 och $\sqrt{20000}$.

```
>> G0 = [100 -100];
>> [v,d] = eig(G0'*G0)

v =

-0.7071   -0.7071
-0.7071    0.7071


d =

0             0
0         20000
```

De båda egenvärdena till $G(0)^*G(0)$ svarar mot egenvektorerna (vi kan alltid skala om egenvektorer med en skalär) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (för $\sigma = 0$) och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (för $\sigma = \sqrt{2} \cdot 10^2$). I det första fallet ökar inkomster och utgifter lika mycket, d v s ingen förändring av förmögenheten. I det andra fallet ökar inkomsterna medan utgifterna minskar (eller tvärtom), vilket ger en förmögenhetsökning(minskning).

(c) Antag att insignalen $u_1(t)$ ger utsignalen $y_1(t)$ och att insignalen $u_2(t)$ ger utsignalen $y_2(t)$. Det räcker nu enligt superpositionskravet att visa att insignalen $u(t) = k_1u_1(t) + k_2u_2(t)$ ger utsignalen $y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$, d v s att $u(t)$ och $y(t)$ uppfyller

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + u(t)$$

Vi har

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= k_1\dot{y}_1(t) + k_2\dot{y}_2(t) \\ &= k_1(a(t)y_1(t) + u_1(t)) + k_2(a(t)y_2(t) + u_2(t)) \\ &= a(t)(k_1y_1(t) + k_2y_2(t)) + k_1u_1(t) + k_2u_2(t) \\ &= a(t)y(t) + u(t) \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

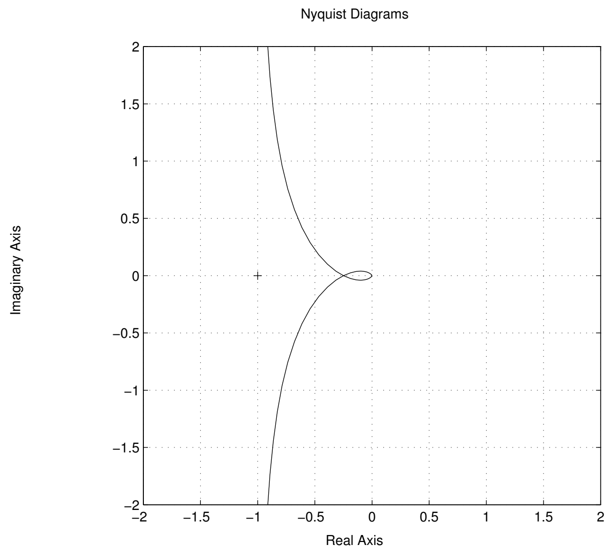
2. (a) Olinjäriteten begränsas av räta linjer med lutningar $k_1 = 0$ respektive $k_2 = 1/a$. Enligt cirkelkriteriet måste $G(\mathrm{i}\omega)$ ligga till höger om en lodrät linje genom punkten $-a$. För Nyquistkurvan gäller

$$\operatorname{Re} G(i\omega) = -\frac{16}{(\omega^2 + 4)^2}$$

vilket betyder att $\operatorname{Re} G(\mathrm{i}\omega) \to -1$ då $\omega \to \infty$. Detta ger villkoret $a > 1$ för att cirkelkriteriet skall vara uppfyllt. Med

```
>> nyquist( 4, [ 1 4 4 0 ] )
>> axis( 'square' )
>> axis( [ -2 2 -2 2 ] )
>> grid
```

fås Nyquistkurvan nedan.



(b) För mättningen gäller

$$-\frac{1}{Y_f(C)} = -a, \quad C \le 1 \qquad \text{och} \qquad -\frac{1}{Y_f(C)} \to -\infty, \quad C \to \infty$$

d v s $-1/Y_f(C)$ utgörs av intervallet $(-\infty, -a\,]$.
Självsvängning kan förväntas inträffa om $G(\mathrm{i}\omega)$ passerar negativa realaxeln i en punkt till vänster om $-a$.

$$\operatorname{Im} G(\mathrm{i}\omega) = \frac{4\omega^2 - 16}{\omega(\omega^2 + 4)^2} = 0$$

ger $\omega = {}^{+}_{(-)}2$ och $G(\mathrm{i}2) = -1/4$, vilket ger villkoret $a > 1/4$.

(c) För små C sker omcirkling och för stora C sker ej omcirkling, d v s självsvängningen är stabil. När kurvorna skär varandra sker det för $\omega = 2$, vilket innebär att svängningen kommer att ha periodtid $T = \pi$.

3. (a) Underdeterminanter $\frac{1}{s+2}$, $\frac{2}{s+4}$, $\frac{1}{s+1}$, $\frac{1}{s+2}$ samt maximal underdeterminant $\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+1)(s+4)} = \frac{-(s^2+3s+4)}{(s+1)(s+4)(s+2)^2}$. Minsta gemensamma nämnare till underdeterminanter är $(s+1)(s+4)(s+2)^2$ vilket betyder att polpolynomet är just $(s+1)(s+4)(s+2)^2$ och att polerna således är $-1, -4, -2, -2$. Den maximala underdeterminanten har polpolynomet som nämnare redan vilket betyder att täljaren definierar nollställespolynomet och nollställen är således rötter till $s^2 + 3s + 4 = 0$ vilket ger $s = -1.5 \pm 1.323i$ Verifiering i MATLAB

```
>> G = [ 1/(s+2) 2/(s+4) ; 1/(s+1) 1/(s+2) ];
>> pole(G)
 ans =

  -2
  -1
  -4
  -2

>> tzero( G )
ans =
  -1.5000 + 1.3229i
  -1.5000 - 1.3229i
```

(b) Kod rakt av ger

```
>> G = [1/(s+2) 2/(s+4);1/(s+1) 1/(s+2)];
>> F = [0 5;5 0];
>> Gc = feedback(G*F,eye(2));
>> pole(Gc)

ans =

-16.2449 + 0.0000i
-4.8756 + 0.0000i
-1.4398 + 0.9522i
-1.4398 - 0.9522i
-16.2449 + 0.0000i
-4.8756 + 0.0000i
-1.4398 + 0.9522i
-1.4398 - 0.9522i
```

Om man fått detta måste man dock förstå att det inte kan vara rätt. Systemet har 4 poler, och regulatorn är helt statisk, således kan inte slutna systemet ha fler än 4 poler. Om vi tvingar MATLAB att städa upp numeriken lite får man ett rimligt resultat

```
>> pole(minreal(ss(Gc)))
4 states removed.

ans =

-16.2449 + 0.0000i
-4.8756 + 0.0000i
-1.4398 + 0.9522i
-1.4398 - 0.9522i
```

Statiska förstärkningen kan vi antingen göra med vårt redan konstruerade slutna system, eller manuellt om man så önskar

```
>> Gc0 = freqresp(Gc,0)

Gc0 =

0.5932    0.1695
0.1695    0.7627

>> G0 = [1/2 1/2;1 1/2]
```

```
>> Gc0 = inv(eye(2)+G0*F)*G0*F

Gc0 =

0.5932    0.1695
0.1695    0.7627
```

Vi ser att vi har kraftiga reglerfel, och korskoppling statiskt.

(c) Statiska reglerfel brukar kunna lösas med integralverkan vilket således är en rimlig ansats

```
>> G = [1/(s+2) 2/(s+4);1/(s+1) 1/(s+2)];
>> F = [0 5+0.01/s;5+0.01/s 0];
>> Gc = minreal(ss(feedback(G*F,eye(2))))
>> pole(Gc)
>> freqresp(Gc,0)
ans =

-16.2433 + 0.0000i
-4.8747 + 0.0000i
-1.4396 + 0.9520i
-1.4396 - 0.9520i
-0.0010 + 0.0000i
-0.0017 + 0.0000i


ans =

1.0000    0.0000
-0.0000    1.0000
```

Asymptotiskt stabilt (och polerna ser rimliga ut, 6 stycken då systemet har 4 och regulatorn 2). Notera att integralverkan har löst problematiken med korskoppling statiskt. Om man vill kan man naturligtvis göra det explicit via frikoppling

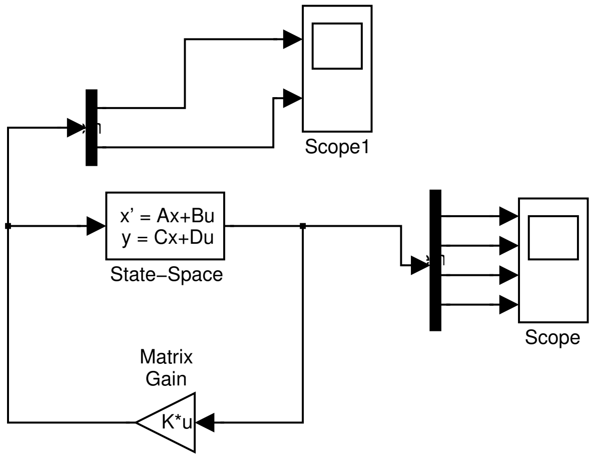
```
>> F = inv(freqresp(G,0))*[5+0.01/s 0;0 5+0.01/s];
>> Gc = minreal(ss(feedback(G*F,eye(2))))
>> pole(Gc)
>> freqresp(Gc,0)
ans =

-30.9123 + 0.0000i
-5.3762 + 0.0000i
-1.3541 + 1.2771i
-1.3541 - 1.2771i
-0.0017 + 0.0000i
-0.0017 + 0.0000i
-0.0017 + 0.0000i
-0.0017 + 0.0000i


ans =

1.0000    0.0000
0.0000    1.0000
```

Notera att Matlab misslyckas med polberäkning här trots att vi försökt städa upp då Matlab påstår 8 poler i slutna systemet (varav ett par ser ut att vara ett repeterat par som förmodligen är falsk pga numeriska problem...). Hade man istället gjort

```
Gc = feedback(minreal(ss(G*F)),eye(2))
```

så hade numeriken funkat. Alltid bra att komma ihåg att vara vaksam på.

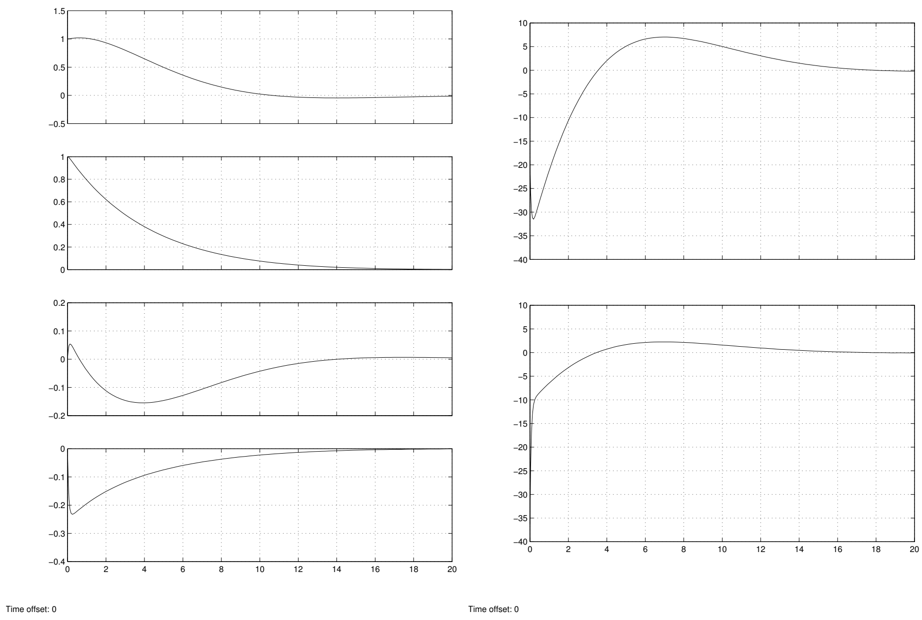
4. (a) En tillståndsåterkoppling av roboten kan simuleras mha simulinkschemat nedan.



Blocket State-Space innehåller A- och B-matriserna, C som `eye(4)`, D som `zeros(4,2)`, samt initialtillståndet $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. En L-matris för tillståndsåterkoppling kan i MATLAB beräknas m h a `lqr`-kommandot:

```
L = lqr( A, B, diag([ 1000 2000 500 25000 ]), diag([ 1 2 ]) );
```

Valet av viktmatriser ovan visar sig ge ett slutet system som uppfyller de ställda kraven. Figurerna nedan visar simuleringsresultaten



Figur 1: Simuleringsresultat

(b) Systemets överföringsfunktion från moment till reglerade vinklar ges av

```
>> A = [0 0 1 0;0 0 0 1;0 0 -0.0171 0.0429;0 0 0.0429 -.1371];
>> B = [0 0;0 0;0.0171 -0.0429;-0.0429 0.1371];
>> M = [1 0 0 0;0 1 0 0]
>> tf(ss(A,B,M,0))

From input 1 to output...
         0.0171 s + 0.000504
1:  ----------------------------
    s^3 + 0.1542 s^2 + 0.000504 s

       -0.0429 s - 9.751e-19
2:  ----------------------------
     s^3 + 0.1542 s^2 + 0.000504 s
```

```
From input 2 to output...
       -0.0429 s + 3.358e-19
1:  -----------------------------
     s^3 + 0.1542 s^2 + 0.000504 s

        0.1371 s + 0.000504
2:  -----------------------------
     s^3 + 0.1542 s^2 + 0.000504 s
```

Vi noterar att alla element har en pol i origo (vilken kommer från att båda utsignalerna är integraler av hastigheter, som skapas av det pålagda momentet), dvs vi kan bryta ut en gemensam term $\alpha = \frac{1}{s}$ från matrisen, eller ekvivalent faktorisera som $(\frac{1}{s}I)\tilde{G}(s))$ som vi ska beräkna RGA på. Efter att ha gjort det kan man stoppa in $s = 0$ i den kvarvarande matrisen och man får en diagonal matris och således blir RGA identitetsmatrisen. Alternativt noterar man att nämnarna är samma på alla element, och således kommer man för varje val av s få samma nämnare som kan tas bort, och kvar blir en matris där s kan vara 0 utan problem.

(c) Vi har alltså $\dot{x} = Ax + Bu + B_w w$ där B_w är första kolumnen i B. Om w har ett spektrum enligt beskrivning så kan vi modellera det som att w är vitt brus filtrerat genom ett linjärt system med konstant förstärkning upp till 1 rad/s och sedan avtagande, t.ex $W(s) = {}^{1}s + 1V(s)$. En tillståndsmodell för detta är, om vi låter $x_w = w$, $\dot{x}_w = -x_w + v$. Låt $\tilde{x} = (x, x_w)$ och vi har

$$\dot{\tilde{x}}(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0171 & 0.0429 & 0.0171 \\ 0 & 0 & 0.0429 & -0.1371 & -0.0429 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0171 & -0.0429 \\ -0.0429 & 0.1371 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)$$

5. (a) Här gäller

$$A = -1 \qquad N = 1 \qquad C = 1 \qquad R_1 = 1 \qquad R_2 = 1$$

Ekvation (5.79) i läroboken, med $R_{12} = 0$, ger

$$-2P + 1 - P^2 = 0$$

med lösningen $P = \sqrt{2} - 1 = 0.41$, vilket alltså är vad variansen för skattningsfelet konvergerar mot.

(b) Med de två matsignalerna kan systemet beskrivas med ekvationerna

$$\dot{x}(t) = -x(t) + v_1(t)$$

som tidigare, och med mätsignalekvationerna

$$y(t) = Cx(t) + v_2(t)$$

där

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2(t) = \begin{pmatrix} v_{2,1}(t) \\ v_{2,2}(t) \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Ekvationen för P blir nu (vi har att $C^{\mathrm{T}} R_2^{-1} C = 1 + \epsilon^{-1}$)

$$-2P + 1 - (1 + \epsilon^{-1}) P^2 = 0$$

med positivt semidefinit lösning $P = \frac{-\epsilon + \sqrt{\epsilon(1+2\epsilon)}}{1+\epsilon}$. Halva variansen erhålls då $P = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, vilket sker ungefär då $\epsilon = 0.079$.