Lösningar till tentamen i Reglerteknik f k TSRT06

Tentamensdatum: 2023-01-12

1. (a) Låt $x = (v, z)$. Från andra differentialekvationen ses att en stationär punkt kräver $v = 0$ eller $z = 0$ eller $z = 1$. Från $z = 0$ eller $v = 0$ leder första differentialekvationen till $v = 0$ repsektive $z = 0$ i stationäritet, dvs $x = (0, 0)$ är en stationär punkt. Från $z = 1$ leder den första differentialekvationen till $v^n = 1$. När n är udda är enda lösningen $v = 1$, när n är jämnt fås $v = 1$ och $v = -1$. Sålunda, stationära punkter $x = (1, 1)$ när n udda och de två punkterna $x = (1, 1)$ och $(-1, 1)$ när n är jämnt.

   Jacobianen ges av $\begin{pmatrix} -nv^{n-1} & 1 \\ z(1-z) & (1-2z)v \end{pmatrix}$ från vilken linjäriseringar tas fram.

   - Stationär punkt $(0, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi kan ej uttala os om olinjära systemets stabilitet kring denna punkt då båda egenvärdena ligger i origo.
   - Stationär punkt $(1, 1)$, $A = \begin{pmatrix} -n & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Båda egenvärdena strikt i VHP, och således är olinjära systemet asymptotiskt stabilt i en omgivning till denna punkt (oavsett om n är jämnt eller udda)
   - Stationär punkt $(-1, 1)$ (uppträder då n jämnt), $A = \begin{pmatrix} -n(-1)^{n-1} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Eftersom n är jämnt så är $n - 1$ udda vilket betyder att $(-1)^n = -1$ vilket betyder att $-n(-1)^{n-1}$ blir n. Således har vi ett egenvärde egenvärde strikt i HHP vilket betyder att olinjära systemet är instabilt i en omgivning till denna punkt.

   Vanliga misstag

   - Missar att den andra differentialekvationens nollställen är triviala och sålunda gör sökandet efter stationära punkter enkelt när man väl ha de begränsningarna.
   - Missar att $v^n = 1$ även har lösningen -1 då n är jämnt.
   - Onödigt mycket arbete läggs på att beräkna egenvärden på diverse krångliga sätt (en triangulär matris egenvärden är elementen i diagonalen)
   - Missar att man ska uttala sig om det olinjära systemets stabilitetsegenskaper i de stationära punkterna, inte den linjära approximationens stabilitet (subtil skillnad)

   (b) Med standardansättning $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$ så får vi en tillståndsmodell $\dot{x} = f(x, u)$ med

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{-x_1^2 x_2 + u}{2 + \sin(x_1)} \end{aligned}$$

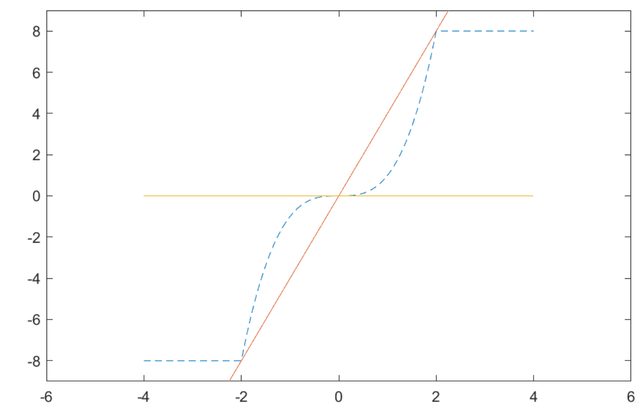
   Vanliga misstag

   - Förstår inte att det krävs 3 tillstånd eftersom högsta ordningens derivata är just 3.
   - Tror att en tillståndsmodell måste skrivas i formen $\dot{x} = Ax+Bu$. Det är en linjär tillståndsmodell och bara möjligt för just linjära system. Om man skriver $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$ blir det förvisso rätt, men ett onödigt krångligt sätt att skriva ett gäng differentialekvationer $\dot{x} = f(x, u)$ på.

   (c) Med insignaler u_1 resp u_2 som ger $y_1(t) = \int_0^t \tau u_1(\tau)d\tau$ och $y_2(t) = \int_0^t \tau u_1(\tau)d\tau$ så har vi att $\alpha u_1 + \beta u_2$ ger $\int_0^t \tau \left(\alpha u_1(\tau)d + \beta u_2(\tau)\right) d\tau = \int_0^t \tau\alpha u_1(\tau)d\tau + \int_0^t \tau\beta u_2(\tau)d\tau$ dvs $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ vilket bevisar linjäritet enligt superposition (skalning+additivitet). Alternativt, ansätt att $\dot{y} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ och vi får att lösning uppfyller $\dot{y}(t) = \alpha t u_1(t) + \beta t u_2(t)$ vilket är konsistent med att det är en lösning till $\dot{y}(t) = t(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t))$.

   Vanliga misstag

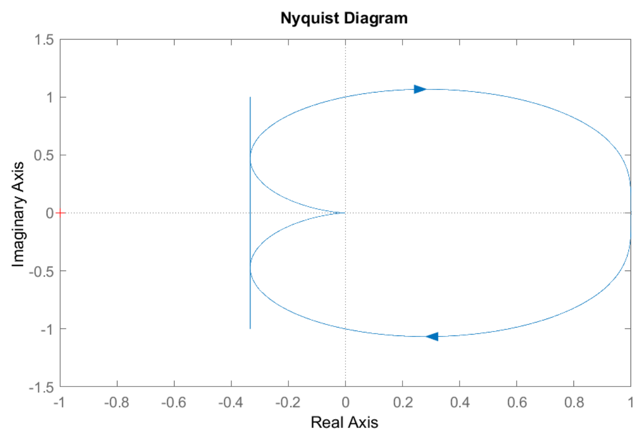
   - Visar linjäritet för specifikt u, t.ex $u = 1$. Då har man inte visat generell linjäritet utan bara att det beter sig linjärt för ett specialfall. (Om man hade visat att man bryter linjäritetsegenskaper för ett specifikt val av u hade man däremot bevisat att systemet är olinjärt eftersom det inte är linjärt ens för ett specialfall)



Figur 1: Olinjäritet och instängning

2. (a) Olinjäriteten kan stängas in mellan två linjära funktioner med lutning $k_1 = 0$ respektive $k_2 = k^3/k = k^2$ (värsta punkterna är hörnen $e = \pm k, f(e) = \pm k^3$).

   Detta betyder att det förbjudna området är den cirkel som definieras av punkter $-1/0 = -\infty$ och $-1/k^2$ på reella axeln. Denna degenererade cirkel är området i komplexa talplanet med realdel mindre än $-1/k^2$. Plot av nyquistkurvan $G(i\omega)$ visar att realdelen som minst är $-1/3$. Således måste $-1/k^2 < -1/3$ dvs $k < \sqrt{3}$.



Figur 2: Nyquistkurva samt linje som markerar förbjudna området till vänster om $-1/3$

   Vanliga misstag

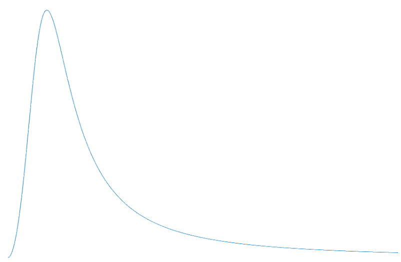
   - Misslyckas att ens skissa hur funktionen ser ut (missar att den är konstant för stora e)
   - Tror att funktionens största derivata är det som definierar den instängande linjära funktionen. Det ger förvisso en instängning, men det blir väldigt konservativt. Ett relä med dödzon har t.ex oändlig derivata i en punkt, men kan enkelt stängas in under en begränsad linjär funktion. Största derivatan är bara intressant om denna snabba tillväxt inträffar i origo och man därför måste justera sin instängning baserat på lutningen initialt.

   (b) Eftersom den olinjära funktionen är statisk och entydig så betyder detta att den beskrivande funktionen enligt boken måste vara realvärd. Eftersom nyquistkurvan aldrig skär realla axeln så betyder det att vi inte kan ha några problem med omcirkling av punkter på beskrivande funktionen eller skärningar med den, dvs inga problem alls predikteras.

   Vanliga misstag

   - Vanligaste misstaget var att man trodde att man skulle beskriva teorin i allmänhet, och inte relatera till det specifika fallet vi analyserar här.
   - Argumenterar inte för att den beskrivande funktionen enligt teori borde vara reell.

   (c) För små amplituder C och insignal $C\sin(\omega t)$ kommer utsignalen vara mkt mindre än insignalen (eftersom vi tar kub på ett litet värde) vilket betyder att $Y_f(C)$, som är en genomsnittsförstärkning över en period för nämnda signal, bör vara liten, och klart mindre än 1. Även för väldigt stora C kommer utsignalen vara väldigt liten relativt insignalen, eftersom signalen mättas och aldrig kan ha amplitud större än k^3. Detta betyder att förstärkningen $Y_f(C)$ måste gå mot 0 även för stora C. För C i området däremellan är $Y_f(c)$ ökande initialt där kuben agerar allt mer förstärkande, men börjar sedan falla av när mättningen tar över.



Figur 3: Principiellt utseende på $Y_f(C)$

Vanliga misstag

- Säger att beskrivande funktion borde se ut ungefär som olinjäriteten, vilket inte är intuitivt rimligt eftersom beskrivande funktionen är en approximation av funktionens genomsnittliga förstärkning över en period för en sinus med amplitud C, vilket torde bete sig principiellt som $f(e)/e$. Alternativt borde man argumenterna för att den beskrivande funktionen för små C borde ha en likhet med beskrivande funktion för kub (således växande) men sedan likhet med beskrivande funktion för mättning för väldigt stora C (dvs avtagande)

(d) Cirkelkriteriet är konservativt, så även om den inte kan visa stabilitet för $k \geq \sqrt{3}$ så betyder inte det att det återkopplade systemet blir instabilt. Beskrivande funktion är däremot approximativ så även om denna analys indikerar att vi bör förbli stabila oavsett k så kan vi inte vara helt säkra på det svaret.

Vanliga misstag

- Missar att beskrivande funktionen inte ger sanningen utan baseras på approximationer, och att vi därför inte garanterat vet vad som händer för $k \geq \sqrt{3}$

3. (a) RGA beräknas med

```
>> G0 = [16 30 4; -17 31 -1;1 54 5]
>> G0.*inv(G0).'

ans =

1.6170    1.2186   -1.8356
-0.5426    1.1393    0.4033
-0.0745   -1.3578    2.4323
```

Eftersom negativa kopplingar är förbjudna säger sista raden direkt att vi måste koppla $y_3 \to u_3$. Detta gör att andra raden tvingas till $y_2 \to u_2$ (vilket är det naturliga valet eftersom den kopplingen är närmast 1) och således tvingar första raden oss till $y_1 \to u_1$ (vilket känns lite fel eftersom kopplingen $y_1 \to u_2$ är närmare 1, men den styrsignalen är redan tagen).

Vanliga misstag

- Listar alla positiva element som möjliga kombinationer, men missar att när man väl gjort ett tvunget val, så låser det även andra val vilket gör att det i slutändan bara finns en enda tillåten konfiguration.
- Använder samma styrsignal till två reglerade signaler.
- Börjar prata om att använda $F = G(0)^{-1}$ vilket är precis det man inte ska göra, eftersom den frikopplingen inte har en diagonal struktur (dvs en styrignal baseras på ett reglerfel).

(b) Underdeterminanter ges av $\frac{1}{s+1}$, $\frac{\alpha}{s+2}$, $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ samt den maximala $\frac{1}{s+1}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} - \frac{\alpha}{s+2}\frac{1}{s+1}$ som blir $\frac{(1-\alpha)s+(3-\alpha)}{(s+1)^2(s+2)}$. Generiskt ges alltså MGN av $(s+1)^2(s+2)$ vilket betyder en dubbelpol i -1 samt en pol i -2.

Det som dock kan hända är att det för något α sker en förkortning i den maximala underdeterminanten som förkortar bort antingen $(s+1)$ eller $(s+2)$.

Således, kan -1 eller -2 vara en lösning till $(1-\alpha)s + (3-\alpha) = 0$? Om vi stoppar in $s = -1$ fås $2 = 0$, dvs det kan inte vara en lösning. Om vi stoppar in $s = -2$ fås $\alpha = -1$, dvs för $\alpha = -1$ har täljaren en rot i -2 som förkortas bort. Maximala underdeterminanten blir för detta fallet $\frac{2}{(s+1)^2}$. Vi har dock fortfarande att MGN är $(s+1)^2(s+2)$ (kallat polpolynomet) så multiplicitet på poler påverkas ej.

Nollstälen ges av täljaren till maximala underdeterminanten normerad så att nämnaren är polpolynomet. För generiska fallet är polpolynomet redan lika med nämnaren till maximala undereterminanten, vilket betyder att nollställen är roten till $(1-\alpha)s + (3-\alpha)$ dvs $s = (\alpha-3)/(1-\alpha)$. För degenererade fallet $\alpha = 1$ har vi inget nollställe.

För specialfallet $\alpha = -1$ som gav ett nollställe i -2 som förkortades bort i maximala underdeterminanten måste vi normera $\frac{2}{(s+1)^2}$ så vi får polpolynomet som nämnare, $\frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+2)}$, vilket gör att nollstället ändock blir -2 (vilket är precis samma som formeln ger för generiska fallet).

Dvs mycket arbete med analys av tänkbara förkortningar, men i slutändan hände egentligen inget.

Vanliga misstag

- Ingen analys görs alls på multiplicitet (dvs att det finns två poler i -1 i generiska fallet)
- Ingen analys görs på vad som kan hända med förkortningar.

(c) En statisk frikoppling görs genom att använda en regulator $G(0)^{-1}F_d(s)$ där $F_d(s)$ är diagonal. Vi har

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \; G(0)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Strategin kollapsar om $\alpha = 3$ eftersom de två kolumnerna i $G(0)$ då blir lika och gör att matrisen ej längre är inverterbar (vilket visar sig i att nämnaren (dvs determinanten) blir 0)

Vanliga misstag

- Börjar prata om RGA-analys, som inte har med saken att göra längre eftersom vi just inte vill vara låsta till en diagonal struktur.
- Missar att konstatera att matrisen inte är inverterbar för $\alpha = 3$ då determinanten blir 0

4. (a) Följande inställning visar sig t.ex fungera (vi minskar straffet på hastighet för att sakta ner systemet i hastighetsdynamiken, och straffar hamnpropellrarna lite mer för att använda dom så mycket)

```
>> A = [-.01 0;
>> 0 0];
>> B = [1 1 0 0;
>>      0.1 -0.1 1 1];
>> M = [1 0;0 1];
>> L = lqr(A,B,diag([.001 1]),1*diag([1 1 100 100]));
>> Lr = -pinv(M*inv(A-B*L)*B)
>> x0 = [2;10*pi/180]
>> initial(ss(A-B*L,B*Lr,[M;-L],0),x0)
```

Vanliga misstag

- Använder fel M och förstår inte att de reglerade signalerna är v och θ dvs x dvs $z = x = Ix$.
- Ger inte fel, men ossymmetriska straff på (u_1, u_2) och (u_3, u_4) är inte naturligt. Rimligen vill man generellt använda den vänstra och högra motorn lika mycket, och sålunda bör straffen på dessa vara samma.

(b) Att en motor leverar 0 kan antingen analyseras genom att man tvingar u_i att bli 0 genom att sätta motsvarande rad i L (och L_r) till 0, eller genom att man sätter motsvarande kolumn i B till 0 för att plocka bort den insignalen. Med det kan vi analysera slutna systemets egenvärden (här enbart för två av motorerna då systemet är symmetriskt). Systemen är fortsatt stabila (analyserar man slutna systemet i sin helhet ser man däremot att man kommer få kraftiga statiska reglerfel etc)

```
>> B1fail = B;B1fail(:,1) = 0;eig(A-B1fail*L)


ans =

-0.0210
-0.1569

>> B3fail = B;B3fail(:,3) = 0;eig(A-B3fail*L)

ans =

-0.1500
-0.0458
```

Vanliga misstag

- Gör ingen teoretisk analys alls utan simulerar bara. Det enda vet vi efter ett sådant test är att från just det initialtillståndet fungerar det med en trasig motor.
- Sätter kolumn i B till 0 och räknar sedan ut en ny regulator och visar att LQ har gett en stabil återkoppling (föga förvånande). Det centrala är att vi använder den urpsrungliga regulatorn och visar att den är robust att klara av ett motorhaveri.

(c) För att $v = v_r$ i stationäritet måste vi ha $0 = -v_r + u_1 + u_2$ i stationäritet. Detta kan öppnås på oändligt många sätt, även om den naturliga lösningen är att $u_1 = u_2 = v_3/2$. I stationäritet gäller även från riktningsändringen att $0 = u_1 - u_2 + u_3 + u_4$. Återigen ett samband som kan erhållas på oändligt många sätt genom att justera u_3 och u_4 när väl u_1 och u_2 bestämts. Detta visar sig i att sambandet i sluten loop i stationäritet som definierar L_r, $0 = (A - BL)x + BL_r r, x = r$ kommer vara ett ekvationssystem med 2 ekvationer och 4 obekanta, dvs underbestämt. Lösningen som fås ovan är den naturliga. Vi ser att vi kommer framkoppla lika mycket till u_1 och u_2 och sätta $u_3 = u_4 = 0$ om vi har en nollskild referens v_r men $\theta_r = 0$, och när vi har en referens på θ_r så kommer man köra u_3 och u_4 lika mycket samt minska öka resp minska u_1 och u_2 lika mycket.

```
>> Lr

0.0229    0.0099
0.0229   -0.0099
0      0.0990
0      0.0990
```

Vanliga misstag

- Inte direkt fel, men vanligt att bara nämna att ekationssystemet som definierar L_r blir 2×4 och således är underbestämt, utan att reflektera över vad differentialekvationerna egenligen säger fysikaliskt och varför valet av stationära styrignaler är underbestämt

5. (a) Riccatiekvationen blir $-\alpha P - \alpha P + \mu - P^2 = 0$ dvs $P^2 + 2\alpha P - \mu = 0$ vilken har den positiva lösningen $P = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \mu}$. När systemet blir allt snabbare (dvs α ökar) så går P mot 0.

Vanliga misstag

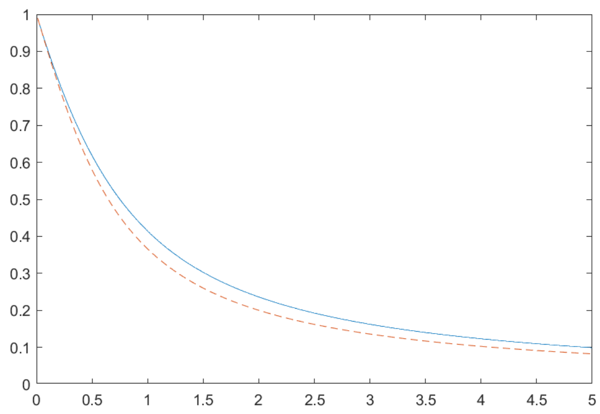
- Misslyckas att lösa den uppkomna andragradaren vilket naturligtvis aldrig får hända eftersom man har en dator framför sig och således enkelt kan testa med siffror och se om lösningen stämmer.

(b) Vi har nu mätsignalen $y = Cx + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} x + v_2$ och Riccatiekationen blir $-\alpha P - \alpha P + \mu - P \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} P = 0$ dvs $-2\alpha P + \mu - P^2(1 + \alpha^2) = 0$ med lösning

$$P = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{\mu}{1+\alpha^2}}$$

Enklast nu är att bara plotta funktionerna (för ett fixt μ) och jämföra, och se att den nya lösningen är mindre för alla α, vilket är rimligt då vi har mer mätningar vilket borde ge bättre skattning

```
alpha = 0.01:0.01:5;
mu = 1;
f1 = -alpha + sqrt(alpha.^2+mu);
f2 = (-alpha./(1+alpha.^2)) + sqrt((alpha./(1+alpha.^2)).^2+mu./(1+alpha.^2));
plot(alpha,f1,alpha,f2,'--')
```



Figur 4: Olinjäritet och instängning

Alternativt kan man visa att lösning i uppgift (a) som vi kallar P_a är större än lösning P_b i uppgift (b). Vi kan t.ex ställa upp de två definitionerna

$$\begin{aligned} P_a^2 + 2\alpha P_a - \mu &= 0 \\ (1+\alpha^2)P_b^2 + 2\alpha P_b - \mu &= 0 \end{aligned}$$

Subtrahera de två ekvationerna och det står $P_a^2 - (1+\alpha^2)P_b^2 = 2\alpha(P_b - P_a)$. Om vi nu påstår att P_b är större än P_a så är högerledet positivt samtidigt som vänsterledet är negativt vilket är en motsägelse, och således kan inte P_b vara större utan måste vara mindre.

Vanliga misstag

- Misslyckas att lösa den uppkomna andragradaren...
- Förstår inte vad C blir.
- Lyckas inte genomföra matrismultiplikationen PC^TCP.
- Säger bara att P är mindre eftersom man delar med en term. Intuitivt rimligt, men det är dock inte självklart, då man inte bara har skalat den negativa termen och den positiva termen med samma skalning (dvs om man drar ut $\frac{1}{1+\alpha^2}$ från kvadratroten så kommer termen inne i kvadroten vara $\sqrt{\alpha^2 + \mu(1+\alpha^2)}$ och det blir inte uppenbart hur man jämför termerna)

(c) Kalmanfilterförstärkningen ges av $K = PC^T = P\begin{pmatrix}1 & -\alpha\end{pmatrix}$. Vi har att $P = \sqrt{\mu}$ när $\alpha = 0$ samt att P går mot 0 för ökande α. Det andra elementet blir 0 för $\alpha = 0$ och genom att skriva som

$$\begin{aligned} P\alpha &= \frac{-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \alpha\sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{\mu}{1+\alpha^2}} \\ &= = \frac{-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\sqrt{1 + \mu\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}} \end{aligned}$$

ser vi att $-P\alpha$ går mot $-(-1+\sqrt{1+\mu})$ för stora α. Alternativt så plottar man bara funktionen för något fixt μ. Slutsatsen är att mätningen av x används främst om α är liten, och mätning av $\dot{x}$ används främst om α är stor.

Vanliga misstag

- Utgår inte från definitionen av K
- Ser inte att andra elementet i K uppenbarligen blir väldigt litet relativt det första när α är liten och väldigt stor relativt första elementet när α är stort, oavsett vad P är, vilket direkt implicerar vilken mätning som kommer ha högst förstärkning. Dvs, några beräkningar behövs knappt.