TENTAMEN I REGLERTEKNIK
FORTSÄTTNINGSKURS M, TSRT06

TID: 2023-01-12, klockan 8 - 12.

ANSVARIG LÄRARE: Johan Löfberg, 070-3113019

TILLÅTNA HJÄLPMEDEL: Läroboken Glad-Ljung: ”Reglerteknik, Grundläggande teori”, Läroboken Glad-Ljung, ”Reglerteori. Flervariabla och olinjära metoder”, Anteckningar i bok tillåtna, Utgivna formelsamlingar såsom Tefyma, Mathematics handbook, Beta handbook etc, räknare, Matlab, Simulink.

PRELIMINÄRA BETYGSGRÄNSER:	betyg 3	23 poäng
	betyg 4	33 p
	betyg 5	43 p

OBS! Lösningar till samtliga uppgifter ska presenteras så att alla steg (utom triviala beräkningar) kan följas. Bristande motiveringar ger poängavdrag.

Lycka till!

1. (a) Vi har fått givet ett olinjärt system

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -v^n + z \\ \dot{z} &= z(1-z)v\end{aligned}$$

där $n \geq 1$ är ett heltal. Tag fram alla stationära punkter och linjärsera systemet i dessa punkter. Använd linjäriseringen för att uttala dig om det olinjära systemets stabilitet i en omgivning till de stationära punkterna, och hur detta påverkas av parametern n (6p)

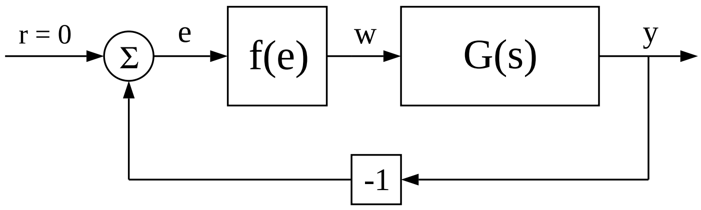
(b) Skriv följande differentialekvation som en olinjär tillståndsmodell

$$(2 + \sin(y))\dddot{y} + y^2\dot{y} - u = 0$$

(2p)

(c) Visa huruvida $\dot{y}(t) = t^2 u(t)$ är ett linjärt eller olinjärt system (2p)

2. Antag att vi har ett linjärt system återkopplat med en olinjär regulator enligt figur.



Figur 1: Linjärt system reglerat med olinjär regulator

Det reglerade systemet ges av

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Regulatorn är en mättad kubisk funktion parameteriserad i $k > 0$

$$f(e) = \begin{cases} e^3 & -k < e < k \\ k^3 & e \geq k \\ -k^3 & e \leq -k \end{cases}$$

(a) Använd cirkelkriteriet för att ta fram ett krav på för vilka $k > 0$ som vi kan garantera stabilitet på det återkopplade systemet (4p)

(b) Argumentera principiellt för vad en analys baserat på beskrivande funktion borde resultera i gällande stabilitet och möjlighet till kvarvarande oscillationsfenomen. (3p)

(c) Gör en principiell skiss av den beskrivande funktionen baserat på olinjäritetens förstärkningsegenskaper. (2p)

(d) Diskutera skillnader eller likheter i de resultat som din analys med cirkelkriterie respektive beskrivande funktion kommer fram till (1p)

3. (a) Betrakta det flervariabla systemet

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \frac{16}{s+1} & \frac{30}{2s+1} & \frac{4}{3s+1} \\ \frac{-17}{s+1} & \frac{31}{2s+1} & \frac{-1}{3s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{54}{2s+1} & \frac{5}{3s+1} \end{pmatrix} U(s)$$

Ange systemets RGA (statiskt i $\omega = 0$) och föreslå baserat på denna en diagonal regulatorstruktur, dvs vilka styrsignaler u_i och reglerade signaler y_j som kan används i en uppsättning med envariabla regulatorer. (3p)

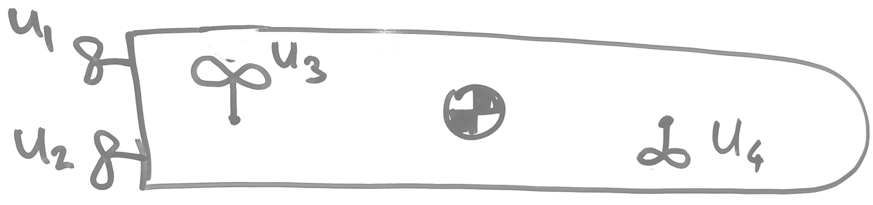
(b) Visa analytiskt vilka poler och nollställen, med utredd multiplicitet, som följande linjära system har, som funktion av parametern α.

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{\alpha}{s+2} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$$

(4p)

(c) Förslå en metod för att statiskt frikoppla systemetet i (b). För vilka α går den att konstruera? (3p)

4. Ett fartyg har byggts med två grupper av propellrar. Längst bak finns monterat två propellrar som styrs med effekterna $u_1(t)$ och $u_2(t)$. Deras främsta syfte är att driva båten framåt med en hastighet, men genom att köra propellrarna med olika effekt kan man även få fartyget att ändra sin färdriktning. Under fartyget är även två propellrar monterade som alstrar kraft via styrsignaler $u_3(t)$ och $u_4(t)$ ortogonalt mot fartygets längsriktning. Främsta användningsområdet för dessa är i hamnar för att kunna flytta fartyget sidledes vid bryggor, samt att få fartyget att rotera på plats. Man kan även köra propellrarna under färd och på så sätt hjälpa till i justering av färdriktning, men det är inte deras huvudsyfte.



Figur 2: Fartyg med placering av fyra propellrar

En modell som beskriver fartyget (linjäriserat kring en marchfart) ger att avvikelse i hastighet från marschfart kan beskrivas av

$$\dot{v} = -0.01v + u_1 + u_2$$

och riktningsändring beskrivs av

$$\dot{\theta} = 0.1u_1 - 0.1u_2 + u_3 + u_4$$

Med $x = (v, \theta)$ har vi sålunda en tillståndsmodell

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 1 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

(a) Tag fram en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + L_r r$ som från ett initialtillstånd där vi kör 2 m/s för snabbt och åker snett med 10°, dvs $x_0 = (2, 10\pi/180)$, uppfyller följande

- Det tar minst 30 sekunder och max 60 sekunder att få ner hastigheten till 0.2 m/s. Med andra ord, vi vill inte ha en för snabb och aggressiv dynamik, men inte för långsam heller.

- Det största (absolut)värdet på de två hamnpropellrarna u_3 och u_4 får max vara en tiondel av det största (absolut)värdet på u_1 och u_2 (dvs vill främst använda u_1 och u_2 vid normalfärd)

Framkopplingen ska tas fram så att man kan göra referensföljning utan statiskt reglerfel på de två reglerade signalerna v och θ. **OBS:** Vid beräkning av din framkoppling kommer du vara tvungen att använda en pseudo-inverse (`pinv`) istället för en invers (`inv`). Vi återkommer till det snart. (5p)

(b) Visa att din regulator ger ett fortsatt stabilt system även om en av de fyra motorerna går sönder (dvs ger 0 i effekt). (3p)

(c) Beskriv de explicta uttryck som beskriver sambandet mellan styrsignaler och referenser v_r och θ_r i stationäritet (dvs de ekvationer som är grunden till L_r). Förklara varför dessa ekvationer indikerar att man inte kan använda en invers utan behöver något annat, samt vad de fysikaliskt säger om de stationära styrsignalerna. Du kan även studera det L_r du har beräknat och kommentera på hurvida `pinv` har valt en rimlig framkoppling utifrån det du sett. (2p)

5. Ett system kan beskrivas med en skalär modell som beror på en konstant $\alpha \geq 0$

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + v_1(t)$$

där $v_1(t)$ modellerar ett modellfel och antas vara en vit signal med varians μ och väntvärde 0.

(a) I en första analys tänker vi oss att vi kan mäta $x(t)$ med ett mätfel, $y(t) = x(t) + v_2(t)$ där $v_2(t)$ är en vit signal med varians 1. Antag att vi använder ett Kalmanfilter. Vad går skattningsfelets varians mot när systemet blir godtyckligt snabbt? (3p)

(b) Antag att vi har möjlighet att installera en ny sensor som även mäter derivatan, men med mätfel. Vi tänker oss nu att

$$y(t) = \begin{pmatrix} x \\ -\alpha x \end{pmatrix} + v_2(t)$$

där $v_2(t)$ är en vit signal med väntvärde 0 och varians $I^{2\times 2}$. Vad blir skattningsfelets varians? Hur förhåller sig denna varians till variansen i (a) när α ändras ? (4p)

(c) I uppgift (b) när vi mäter två signaler, baserat på vad kalmanförstärkningen blir, vilken mätsignal är mest använd för små respektive stora α? (3p)