

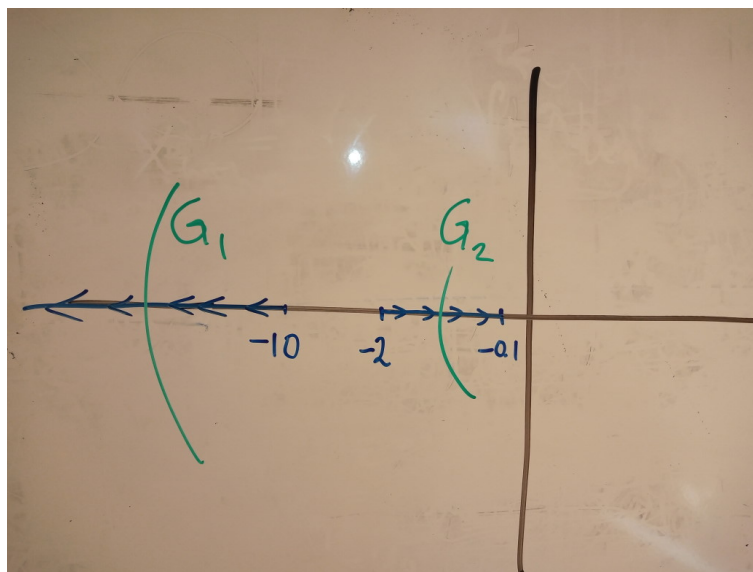
Lösningförslag till tentamen i Reglerteknik fk M (TSRT06) 2022-03-17

1. (a)
 - Snabba förändringar i utsignal som beror på insignal kan fångas upp och inte filtreras bort (dvs generellt modellbaserat)
 - Kunskap om mätbruset utnyttjas för att förbättra filtreringen (storlek, frekvensinnehåll)
- (b) R påverkar inte sökt samband så vi sätter den till 0. Vi har då $U = -F_y(Y + N) = -F_y(GU + N)$ vilket ger $(I + F_yG)U = -F_yN$ som löses till $U = -(I + F_yG)^{-1}F_yN$ och svaret är således $-(I + F_yG)^{-1}F_yN$.
- (c) Rimlig gissning på tillstånd är $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ (eller tvärtom). Vi har då att $\dot{x}_1 = x_2$ och med $\dot{x}_2 = \ddot{y}$ kan vi ta fram en olinjär tillståndsmodell

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha(x_1)x_2 - \beta(x_1 + x_2)$$

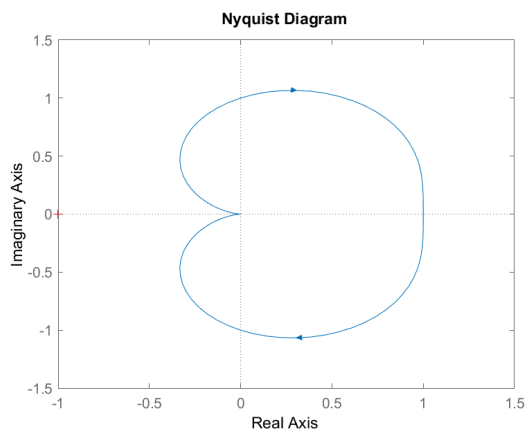
- (d) $G_1(i\omega)$ och $G_2(i\omega)$ har avtagande avstånd till origo och en fas som avtar från 0° mot -270° , dvs en enkel spiralliknande nyquist som börjar på högra reella axeln och sedan snurrar medsols med avtagande avstånd till origo för att till slut ansluta mot origo längs med positiva imaginära axeln. Det viktiga är skärningen med reella axeln vilket sker då amplitud är mer än 40dB för G_1 och runt 0dB för G_2 , dvs till vänster om -100 för G_1 och omkring 1 för G_2 . $-1/Y_{f1}(C)$ kommer börja i -10 och röra sig åt höger mot $-\infty$. $-1/Y_{f2}(C)$ ser ut att börja i -2 och röra sig åt höger till -0.1.



Med hjälp av nyquistanalogi kan vi nu göra en analys av stabilitet och självsvängning

- $G_1 + Y_{f1}$: Nyquistkurvan skär $-1/Y_{f1}$ vilket betyder att det kan finnas självsvängning. Eftersom $-1/Y_{f1}(C)$ lämnar omslutning för ökande C indikerar detta en stabil självsvängning

- $G_1 + Y_{f2}$: Nyquistkurvan omsluter hela $-1/Y_{f2}$ vilket indikerar instabilitet.
 - $G_2 + Y_{f1}$: Nyquistkurvan varken omsluter eller skär $-1/Y_{f1}(C)$ vilket indikerar asymptotiskt stabilt.
 - $G_2 + Y_{f2}$: Nyquistkurvan skär $-1/Y_{f2}$ vilket betyder att det kan finnas självsvängning. Eftersom $-1/Y_{f2}(C)$ fortsätter omslutas för ökande C indikerar detta instabilitet.
2. (a) Olinjäriteten begränsas av linjer med lutningar $k_1 = 0$ respektive $k_2 = \infty$. Enligt cirkelkriteriet måste $G(i\omega)$ ligga till höger om den cirkel som går genom $-1/0$ resp $-1/\infty$, dvs hela komplexa talplanet till vänster om origo. Nyquistkurvan går in i vänstra halvplanet. Stabilitet kan således ej garanteras.



- (b) Det enda som händer när vi stoppar in en linjär komponent K i loopen är att analysen nu måste göras på KG istället. Eftersom en förstärkning K bara skalar nyquistkurvan så kommer den vara inne i vänstra halvplanet oavsett val av $K > 0$, dvs stabilitet kan ej garanteras för något val av K .
- (c) Om vi ersätter G med FG i vår analys så blir således frågan om realdelen på $F(i\omega)G(i\omega)$ kan garanteras icke-negativ för något val av K_P och K_D . Vi har

$$\begin{aligned}
 F(i\omega)G(i\omega) &= \frac{K_P + K_D i\omega}{-\omega^2 + i\omega + 1} \\
 &= \frac{(K_P + K_D i\omega)((1 - \omega^2) - i\omega)}{\text{positivt}} \\
 &= \frac{K_P + \omega^2(K_D - K_P) + \text{komplex}}{\text{positivt}}
 \end{aligned}$$

Så länge som $K_D \geq K_P$ så är realdelen icke-negativ för alla ω och stabilitet kan garanteras.

3. (a) Vi har alltid underdeterminanter $\frac{1}{s+1}$ och $\frac{1}{s+4}$.

Då $\beta = 0$ har vi maximal underdeterminant $\frac{1}{(s+1)^2}$. MGN nämnare och polynom blir således $(s+1)^2(s+4)$, och maximal underdeterminant normerad så att den har polynom som nämnare blir $\frac{(s+4)}{(s+1)^2(s+4)}$ och vi har därför ett nollställe i -4.

Då $\beta \neq 0$ har vi maximal underdeterminant $\frac{(s+4)^2 - \beta(s+1)^2}{(s+1)^2(s+4)^2}$. MGN nämnare och polynom blir $(s+1)^2(s+4)^4$, och maximal underdeterminant normerad så att den har polynom som nämnare är just den maximala underdeterminanten $\frac{(s+4)^2 - \beta(s+1)^2}{(s+1)^2(s+4)^2}$. Täljaren är av andra ordning och har således generiskt två nollställen. Dock, då $\beta = 1$ blir nämnaren linjär och har enbart ett nollställe.

- (b) Vi har $G(0) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ och $G(0)^{-1} = \frac{1}{1-\beta/16} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ vilket ger RGA
- $$\frac{1}{1-\beta/16} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\beta/16} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{16} \\ -\frac{\beta}{16} & 1 \end{pmatrix}$$

För små β så ser vi att en naturlig koppling är $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$, då motvarande RGA-element kommer vara nära 1. Om β samtidigt är positiv säger dessutom RGA-analysen att vi absolut inte får koppla omvänt eftersom de RGA-elementen är negativa.

Om vi låter $16 > \beta > 0$ växa så kommer fortsatt elementen utanför diagonalen vara negativa vilket förbjuder någon annan koppling än $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$. Dock så kommer diagonalelementen komma allt längre från 1 vilket indikerar att en enkel diagonal reglering antagligen inte kommer fungera väl. När β passerar 16 byter alla element tecken, vilket betyder att kopplingarna $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$ är förbjudna. För ökande β går anti-diagonalelementen mot 1 vilket betyder att $u_2 - y_1$ och $u_1 - y_2$ borde fungera allt bättre

För negativa β kommer vi aldrig byta tecken och det finns aldrig några kopplingar som är förbjudna ur stabilitetssynpunkt. För små β är dock $u_1 - y_1$ och $u_2 - y_2$ bäst då dessa ger RGA-element närmast 1, och för allt mer negativt β går anti-diagonalelementen mot 1 vilket betyder att $u_2 - y_1$ och $u_1 - y_2$ borde fungera allt bättre.

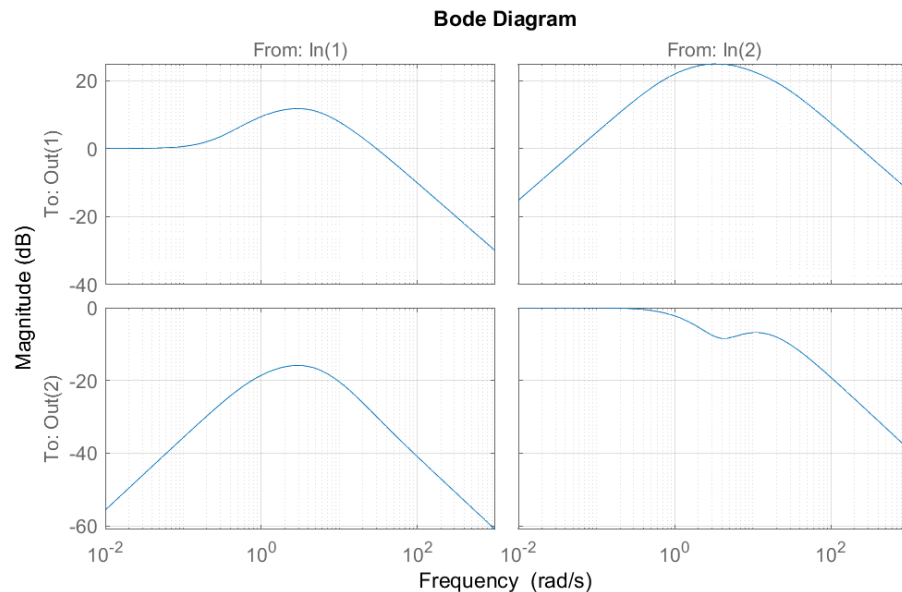
- (c) Standardlösningen är att använda en diagonal regulatorstruktur och sedan koppla om styrsignalen genom $G(0)^{-1} = \frac{1}{1-\beta/16} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$. Detta fungerar så länge som inversen existerar, dvs $\beta \neq 16$.

4. (a) Eftersom vi vill reglera $z = Mx$ så använder vi lämpligen ett straff på tillstånden med strukturen $Q = M^T Q_x M$ (och ett straff $u^T R u$ på styrsignal). Efter lite experimenterande där man t.ex börjar med enhetsmatriser på både Q_x och R så ser man att man inte uppfyller kraven. Öka element som motsvarar de begränsade signalerna och man kan t.ex få

```
>> A = diag([-1 -4 -4 -1]); B = [1 0;1 0;0 4;0 1]; M=[1 0 3 0;0 1 0 1];
>> L = lqr(A,B,M'*diag([1 150])*M,[5 0;0 1])
>> x0 = [1;0;0;0];
>> initial(ss(A-B*L,B,[M(2,:);L(1,:)]),0),x0)
```

- (b) Standard framkoppling

```
L0 = -inv(M*inv(A-B*L)*B);
Gc = ss(A-B*L,B*L0,M,0);
bodemag(Gc)
```



Som väntat så ser vi statisk frikoppling (båda diagonalelementen går statiskt mot 1 och icke-diagonala mot 0). Koppling från r_1 till z_2 är någorlunda ok och blir som högst -20dB dvs runt 0.1. Kopplingen från r_2 till z_1 är däremot katastrofal med ett frekvensområde där kopplingen går över 20dB, dvs referensändringar för z_2 kommer synas kraftigt i z_1 .

- (c) Genom att bara studera differentialekvationen så ser vi att $y = x_1 + x_3$ på intet sätt kan påverkas av x_2 och x_4 pga den diagonala strukturen i A , dvs vi kan aldrig observera x_3 och x_4 via y_1 . Mer stringent så kan vi studera

observerbarhet med $C = (1 \ 0 \ 3 \ 0)$

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 48 & 0 \\ -1 & 0 & -192 & 0 \end{pmatrix}$$

Uppenbart singular och sålunda icke observerbart.

5. (a) Uppgift om u tyder på att vi bör ersätta u med en modell $u + w$ där w är vitt brus filtrerat genom ett filter med bandbredd på 1 rad/s, t.ex $W(s) = \frac{1}{s+1}V_u(s)$. Vi kallar $w = x_4$ och skriver i tillståndsform $\dot{x}_4 = -x_4 + v_u$. Uppgift om \dot{x}_1 indikerar att vi kan skriva den som $\dot{x}_1 = -6x_1 - 3x_2 + x_3 + u + v_x$ där v_x är vitt brus. Slår ihop allt och får

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_u \\ v_x \end{pmatrix} \\ y &= (1 \ 0 \ 0 \ 0)x (+v_2) \end{aligned}$$

- (b) I Kalmanfilternotation har vi $A = \alpha$, $N = \alpha$, $C = 1$ och skall således lösa en Riccati ekvation

$$2\alpha P - \frac{P^2}{\mu} + \alpha^2 = 0$$

Den positiva lösningen till detta ges av $P = \alpha\mu + \sqrt{(\alpha\mu)^2 + \alpha^2\mu}$, vilket även är skattningsfelets varians.

- (c) Då systemet är instabilt ($\alpha > 0$) så visar resultatet i (b) direkt att variansen ökar och går mot ∞ eftersom vi adderar två positiva växande termer. (Numerisk studie skulle vara godkänt här men vi går lite längre i analysen). För att analysera stabila fallet ($\alpha < 0$) är det enklare att först skriva som $P = \alpha\mu + |\alpha\mu|\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}}$. Vi ser att vi adderar en negativ term och en lite större positiv term, där de två termerna blir allt mer lika i absolutbelopp för växande μ , vilket gör att man kan misstänka att det inte sticker iväg. Genom att använda att $\alpha < 0$ och $\mu > 0$ kan vi skriva som $\alpha(\mu - \mu\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}})$. Termen i parantesen visar sig gå mot $-\frac{1}{2}$ (inte 0 som man skulle kunna luras att tro) vilket alltså gör att variansen går mot ett konstant värde $-\frac{\alpha}{2}$.