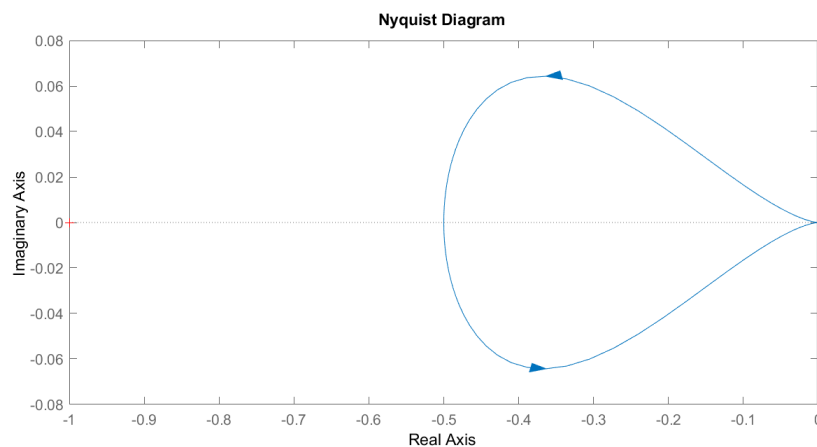


## Lösningförslag till tentamen i Reglerteknik fk M (TSRT06) 2022-01-13

- (a) En LQ-regulator har i teorin (kap 9.8) oändlig amplitudmarginal, och den ökade förstärkningen i systemet skall således ej kunna påverka stabilitet (det blir nog usel prestanda dock, och i praktiken går det förmodligen åt skogen)
- (b) Öppna systemet  $G(s)$  har en instabil pol så krets förstärkningen  $KG(s)$  ska omcirkla punkten  $-1$  en gång för att slutna systemet skall kunna vara stabilt enligt nyquistkriteriet (antalet instabila poler i slutna - antal instabila i öppna = antalet omcirklingar). En nyquistplot visar att  $G(s)$  skapar en loop som ej omcirklar  $-1$  och skär reella axeln vid  $-0.5$ . Genom att välja  $K > 2$  kommer nyquistkurvan för krets förstärkningen skalas upp och omcirkla  $-1$ .

```
s = tf('s');  
G = 3/((s-2)*(s+3));  
nyquist(G)
```



Skadar aldrig att felkontrollera resonemang när man ändå sitter vid en dator

```
pole(feedback(G*2.001,1))
```

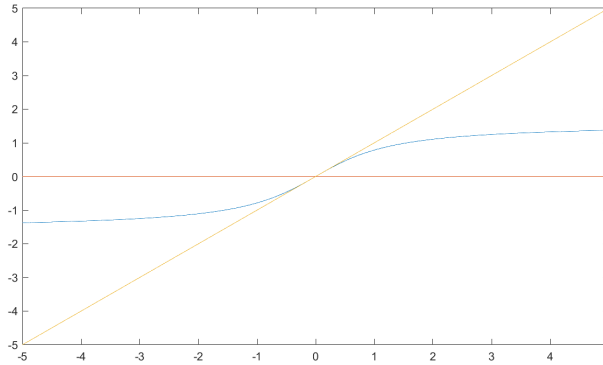
```
ans =
```

```
-0.9970
```

```
-0.0030
```

- (c) Den monotont växande och symmetriska funktionen  $\arctan(e)$  har derivata  $\frac{1}{1+e^2}$ . Då den går genom origo så betyder det att vi kan stänga in den mellan två linjer med lutning 0 (tvunget eftersom funktionen går mot ett konstant värde) och lutning 1 (största lutningen initialt).

```
e = -5:0.01:5;plot(e,atan(e),e,0*e,e,1*e)
```



Om vi lägger till  $e$  så ökar vi bara lutningen, och får således att vi stänger in funktionen mellan två linjer med lutning  $k_1 = 1$  och lutning  $k_2 = 2$ . Det förbjudna området blir en cirkel som går genom punkterna  $-1$  och  $-\frac{1}{2}$ . Nyquistkurvan för  $G(s)$  får inte omcirkla denna eller skära in i den.

Jämfört med att vi bara hade haft en återkoppling utan olinjäritet, dvs  $f(e) = e$  vilket helt enkelt betyder återkoppling med P-reglering med  $K = 1$ , så har vi fått ett lite hårdare krav jämfört med att vi inte får omcirkla punkten  $-1$ .

- (d) RGA för  $G(0)$  är

$$\begin{aligned} \text{RGA}(G(0)) &= G(0) \cdot (G(0)^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}g_{22} & -g_{12}g_{21} \\ -g_{12}g_{21} & g_{11}g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \end{aligned}$$

Om  $g_{12} = 0$  eller  $g_{21} = 0$  så blir RGA enhetsmatrisen.

2. (a) Om vi börjar med  $Q = I$  och  $R = I$  så ser vi att vi använder för mycket styrsignal. Vi ökar straffet på styrsignalerna och vid  $R = 1000I$  så uppfylls detta krav. Kravet på avstånden är också uppfyllda, men det sista kravet på den mellersta lastbilens hastighet uppfylls ej. Således ökar vi straffet på detta tillstånd tills det uppfylls, och kontrollerar så att vi fortfarande uppfyller de tidigare uppfyllda kraven.

```
A = [0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 0;
      1 -1 0 0 0;
      0 1 -1 0 0];
B = [eye(3);zeros(2,3)];
Q = diag([1 50 1 1 1]);
R = eye(3)*1000;
x0 = [-3;0;4;0;0];
L = lqr(A,B,Q,R)
initial(ss(A-B*L,B,-L,0),x0)
initial(ss(A-B*L,B,[zeros(2,3) eye(2)],0),x0)
initial(ss(A-B*L,B,[0 1 0 0 0],0),x0)
```

- (b) Nej, fysikaliskt orimligt så ingen ide att ens försöka räkna. Man kan inte skapa en magisk regulator som får lastbilarna att köra i 3 olika konstanta hastigheter samtidigt som de har konstanta avstånd.
- (c) Borde vara enkelt att få två olika önskade avstånd. Vi testar att beräkna en framkoppling

```
M = [0 0 0 1 0;0 0 0 0 1];
l0 = -inv(M*inv(A-B*L)*B)
Error using inv
Matrix must be square.
```

Eftersom  $M$  har höjd 2 och  $B$  har bredd 3 så har vi en icke-kvadratisk matris som vi försöker ta invers på. För att kunna ta invers måste matrisen vara kvadratisk. Fysikaliskt handlar det om att vi har 3 styrsignaler att använda för att styra 2 reglerade storheter, dvs det är överbestämt och det finns flera sätt att definiera framkopplingen, vilket inte formeln är tänkt för uppenbarligen.

3. (a) Vid stationära punkten gäller  $\dot{x} = 0$ :

$$\begin{cases} 0 = -0.1\sqrt{x_1} + u_F \\ 0 = \frac{u_F(10-x_2)+u_V}{x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 100u_F^2 \\ x_2 = 10 + \frac{u_V}{u_F} \end{cases}$$

Låt den stationära punkten vara  $(x_0, u_0)$ , och låt  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta u = u - u_0$ . Med  $\dot{x} = f(x, u)$  får vi kring den stationära punkten att

$$\Delta \dot{x} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\Delta u$$

Den sökta  $A$ -matrisen ges alltså av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} -\frac{0.1}{2\sqrt{x_{0,1}}} & 0 \\ -\frac{u_F(10-x_{0,2})+u_V}{x_{0,1}^2} & -\frac{u_F}{x_{0,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{200u_F} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{100u_F} \end{pmatrix}$$

Polerna ges av egenvärdena till  $A$ -matrisen, vilka för en diagonal matris är diagonalelementen. Vi får alltså poler i

$$-\frac{1}{200u_F} \text{ och } -\frac{1}{100u_F}.$$

(b) Vi har

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)F\bar{U}(s)$$

och vill ha  $Y(0) = \bar{U}(0)$ , dvs ett steg i  $\bar{u}_1$  ger  $y_1 = 0$  och  $y_2 = 0$  i steady-state. Detta kräver  $G(0)F = I$ , vilket erhålls med

$$F = G(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}.$$

Motsvarande  $u_1$  och  $u_2$  ges av  $F(\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T$  vilket ger

$$u_1 = \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{\epsilon} + \bar{u}_1$$

$$u_2 = \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{\epsilon}$$

Då  $\epsilon$  är litet, så blir magnituden på  $u_1$  och  $u_2$  stor då  $\bar{u}_1$  och  $\bar{u}_2$  avviker från varandra. Dvs, det blir väldigt svårt/dyrt att styra de två signalerna individuellt

4. (a)  $Y_f(C)$  är den genomsnittliga förstärkningen över en period för en signal  $C \sin \omega t$ . Den bör alltså bete sig ungefär som en kvoten mellan amplituder på in- och utsignal. För insignaler med storlek mindre än 1 är förstärkningen 1 och inget händer, dvs  $Y_f(C) = 1$  för  $0 \leq C \leq 1$ . För stora amplituder är utsignalen ungefär  $k$  ggr insignalen, och således bör genomsnittlig förstärkning över en period vara ungefär  $k$ . Med andra ord,  $Y_f(C)$  bör vara en funktion som börjar med värde 1 och sedan mjukt ändrar sig och går mot värdet  $k$ .
- (b) Om  $k < 1$  kommer  $-1/Y_f(c)$  utgå från -1 och röra sig åt vänster längs reella axeln och sluta i punkten  $-1/k$ . Om  $k > 1$  kommer  $-1/Y_f(c)$  utgå från -1 och röra sig åt högerlängs reella axeln och sluta i punkten  $-1/k$ . Skärning kan således aldrig ske för fallet  $k < 1$  men kan ske om  $k > 1$ . Om omcirkling sker i fallet  $k > 1$  kan instabilitet förväntas då vi rör oss fortsatt åt höger vid instabilitet.
- (c) I fallet  $k < 1$  måste vi undvika att  $KG(i\omega)$  kommer förbi punkten -1. Eftersom skärningen just nu sker vid  $-3/4$  betyder det att det fungerar så länge som  $K < 4/3$ .  
I fallet  $k > 1$  måste vi undvika att  $KG(i\omega)$  kommer förbi punkten  $-1/k$ . Vi har att  $G(i\omega)$  skär reella axeln i  $-3/4$  vilket betyder att  $K \cdot \frac{-3}{4} > -1/k$  dvs  $K < \frac{4}{3k}$ .

5. (a) Estimeringsfelets storlek ges av kovariansmatrisen  $P = E\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)$ .  
Vi identifierar

$$A = 0, B = 1, C = 1, N = 1, R_1 = \mu, R_2 = 1, R_{12} = 0.$$

Kovariansmatrisen är lösningen till Ricattiekvationen

$$\begin{aligned} AP + PA^T + NR_1N^T - (PC^T + NR_{12})R_2^{-1}(PC^T + NR_{12})^T &= 0 \\ \mu - P^2 &= 0 \\ P = \pm\sqrt{\mu} = /P > 0/ &= \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

- (b) Vi har  $K = PCR_2^{-1} = \sqrt{\mu}$  och får  $\dot{\hat{x}}(t) = u(t) + \sqrt{\mu}(y(t) - \hat{x}(t))$  dvs  $\hat{\dot{x}}(t) = -\sqrt{\mu}\hat{x}(t) + \sqrt{\mu}y(t) + u(t)$  vilket ger att överföringsfunktionen är  $\frac{\sqrt{\mu}}{s+\sqrt{\mu}}$
- (c) Om man skulle använda mätningar  $y(t)$  direkt som en skattning av  $x(t)$  så har felet  $y(t) - x(t) = v_1(t)$  varians  $R_2 = 1$ . Sålunda är det bättre att använda Kalmanfilterskattningen om  $\mu < 1$ .
- (d) Med

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, R_1 = 1, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

använder vi lqe

```
A = [0 1;0 0];
N = [0;1];
C = eye(2);
R1 = 1;
VINKELVARIANS = 1;
R2 = [VINKELVARIANS 0;0 1];
[K,P] = lqe(A,N,C,R1,R2)
```

och får

$$P = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}$$

och variansen på felet på hastigheten ges av element  $\{2,2\}$  i  $P$ , dvs 0.866. Ökad osäkerhet i vinkelmätning mdoelleras av att öka element  $\{1,1\}$  i  $R_2$ . Figuren visar hur osäkerheten i skattningen beror på den modellerade osäkerheten. För ökande osäkerhet konvergerar variansen på skattningen mot hastighetsmätningens osäkerhet, dvs vinkelmätningen hjälper inte till längre.

