Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik fk M (TSRT06) 20190830

1. (a) Antag i samtliga fall att insignal $u_1(t)$ ger utsignal $y_1(t)$ och att insignal $u_2(t)$ ger utsignal $y_2(t)$. Då fås följande resultat för insignalen $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.
Fall (i): Olinjärt ty

$$y(t) = e^{u_1(t)+u_2(t)} = e^{u_1(t)} \cdot e^{u_2(t)} \neq y_1(t) + y_2(t)$$

Fall (ii): Med högerled $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ uppfylls differentialekvationen av $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ty likheten

$$\dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + ty_1(t) + ty_2(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

uppfylls via antagandena att $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar.

$$\dot{y}_1(t) + ty_1(t) = u_1(t)$$

$$\dot{y}_2(t) + ty_2(t) = u_2(t)$$

Fall (iii): Olinjärt ty

$$\sin(y_1(t) + y_2(t)) \neq \sin(y_1(t)) + \sin(y_2(t))$$

(b) Derivatan av olinjäriteten ges av

$$f^{'}(e) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

d v s $f^{'}(e) \to \infty$ $\quad e \to 0$ samt $f^{'}(e) \to 0$ $\quad e \to \infty$. Olinjäriteten begränsas alltså av två linjer med lutningarna $k_1 = 0$ och k_2 oändligt stor. Detta medför att hela vänstra halvplanet är otillåtet.

(c) Ekvationerna

$$\dot{x}_1 = -\beta x_1 x_2 - 1 = 0$$

och

$$\dot{x}_2 = \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 = 0$$

ger de stationära punkterna $x_1 = \gamma/\beta$ och $x_2 = -1/\gamma$.
Derivering ger

$$\bigtriangledown f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta x_2 & -\beta x_1 \\ \beta x_2 & \beta x_1 - \gamma \end{pmatrix}$$

samt

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = -1$$

Insättning ger matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \beta/\gamma & -\gamma \\ -\beta/\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Med

$$\Delta x = \begin{pmatrix} x_1 - \gamma/\beta \\ x_2 + 1/\gamma \end{pmatrix}$$

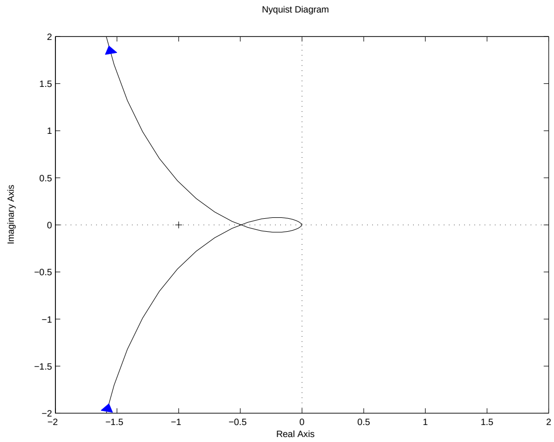
och

$$\Delta u = \begin{pmatrix} u - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fås

$$\dot{\Delta x} = \begin{pmatrix} \beta/\gamma & -\gamma \\ -\beta/\gamma & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u$$

2. (a) För $K = 1$ har systemet $G(s)$ Nyquistkurvan i figuren nedan.



Figur 1: Nyquistkurva

Kurvan passerar negativa realaxeln i punkten $-K \cdot 0.5$. Figuren i uppgiften ger att

$$Y_f(C) = 2 \qquad C \leq 1 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{Y_f(C)} = -1/2$$

$$Y_f(C) \to 0.5 \qquad C \to \infty \qquad \Rightarrow -\frac{1}{Y_f(C)} \to -2$$

Detta innebär att kurvan $-1/Y_f(C)$ utgörs av intervallet $[-2, -0.5]$.
Detta ger:

- För $0 < K < 1$ sker ingen skärning mellan $-1/Y_f(C)$ och $G(i\omega)$, d v s ingen självsvängning kan förväntas.
- För $1 < K < 4$ skär $-1/Y_f(C)$ och $G(i\omega)$ varandra. Kurvan $-1/Y_f(C)$ går ut ur Nyquistkurvan, d v s självsvängningen är stabil.
- För $K > 4$ omsluts hela $-1/Y_f(C)$ av $G(i\omega)$, d v s svängningens amplitud växer.

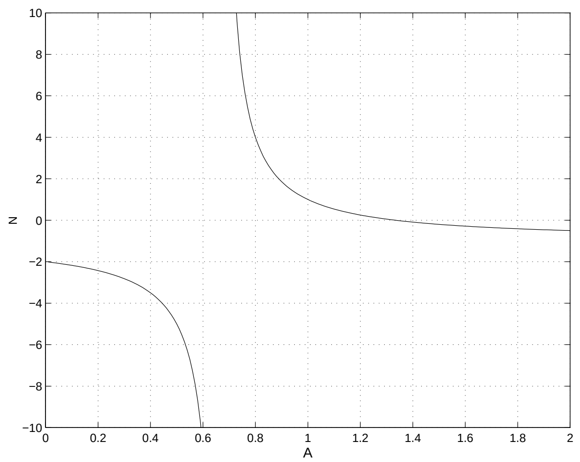
(b) För att få den beskrivande funktionen i uppgiften krävs en olinjäritet med förstärkning 2 för $C \leq 1$ och med förstärkning som går mot 0.5. Detta kan fås med en olinjäritet $f(e)$ bestående av en rät linje med lutningen 2 för $\mid e \mid \leq 1$ och räta linjer med lutning 0.5 för $\mid e \mid \geq 1$.

3. (a)

$$\det G = \frac{(2-3\alpha)s + 4 - 3\alpha}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{2-3\alpha} \cdot \frac{s + \frac{4-3\alpha}{2-3\alpha}}{(s+1)^2(s+2)} \text{ då } \alpha \neq \frac{2}{3}$$

Nämnaren utgör polpolynomet, varför nollställets placering blir

$$n(\alpha) = -\frac{4-3\alpha}{2-3\alpha}$$



Figur 2: Nollställets placering som funktion av α.

(b) För att eliminera $G(s)$ nollställe krävs att $F(s)$ har en pol i $n(\alpha)$. För $2/3 < \alpha < 4/3$ gäller $n(\alpha) > 0$, dvs regulatorn $F(s)$ blir instabil!

(c) Vid statisk frikoppling ingår $G(0)^{-1}$ i $F(s)$. För $\alpha = 4/3$ existerar dock ej inversen. Anledningen är att det för detta α statiskt gäller att $y_1 = 3/2\, y_2$, ett linjärt beroende som ej kan brytas.

4. (a) Med kommandot `eig(A)` fås att alla poler till systemet ligger i origo. Systemet är alltså inte stabilt.

   (b) Kraven uppfylls t ex av återkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) \quad \text{där} \quad L = \begin{pmatrix} -4.4721 & -4.9405 & 19.1028 & 6.1811 \end{pmatrix}$$

   Detta L fås genom LQ-optimering med

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = 1$$

   Polerna till det återkopplade systemet, dvs egenvärdena till $A - BL$, har samtliga absolutbeloppet 2.3654.

   (c) För de två poler som ligger närmast imaginäraxeln gäller att avståndet till origo är ca 2.36 d v s $\omega_0 = 2.36$ samt den relativa dämpningen är $\zeta = \cos(\arctan(2.18/0.9))$. Detta ger en ungefärlig stigtid på 0.69 sekunder. På motsvarande sätt fås en ungefärlig översläng på 28 procent.

5. (a) Ett litet R_2 innebär att vi litar mycket på mätningen (liten mätbrus-kovarians) vilket kommer ge en snabb observatör, dvs. ett stort K. Vi kan således para ihop $(i) \leftrightarrow (B)$, $(ii) \leftrightarrow (A)$, $(iii) \leftrightarrow (C)$.

(b) En snabb observatör (återigen, R_2 liten) kommer att ge en hög bandbredd och hög förstärkning. Detta är tydligast i amplitudkurvan för tillståndet $\hat{x}_2$. Vi får hopparningen $(i) \leftrightarrow$ III, $(ii) \leftrightarrow$ I, $(iii) \leftrightarrow$ II.

(c) Positiv lutning på amplitudkurvan kan kopplas till nollställen (enkel tumregel då man ritar Bodediagram för hand är att amplitudkurvan bryter uppåt då man "passerar" nollställen och nedåt då man "passerar" poler). Har vi initialt (dvs. för $\omega = 0$) en positiv lutning så innebär det att vi har ett nollställe i origo. Ett exempel på en överföringsfunktion som har positiv lutning på amplitudkurvan är alltså en ren derivator $G(s) = s$.

Den positiva lutningen verkar alltså som en derivering, vilket är naturligt då den överför $y(t)$ (mätt vinkel) till $\hat{x}_2(t)$ (skattad vinkelhastighet). Anledningen till att amplitudkurvan viker av nedåt är att vi, pga mätbruset, inte kan tillåta oss att derivera signalen för alltför höga frekvenser (vi skulle då derivera även de högfrekventa komponenterna av mätbruset, vilket ger en kraftig brusförstärkning).

(d) Nedanstående matlabkod ger polernas lägen

```
>> A = [0 1 ; 0 0];
>> B = [0 1]';
>> C = eye(2);
>> R1 = 1;
>> R2 = eye(2);
>> K = lqe(A,B,C,R1,R2);
>> eig(A-K*C)
ans =

  -0.8660 + 0.5000i
  -0.8660 - 0.5000i
```