Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik fk M (TSRT06) 2019-01-11

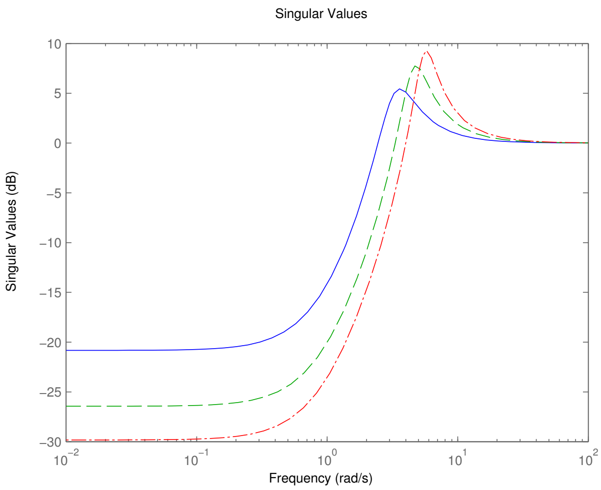
1. (a)
   - Modellosäkerhet
   - Störningar
   - Begränsad styrverkan

   (b)
   - Det är lättare att fördela styrverkan mellan styrsignalerna.
   - Det återkopplade systemet får automatiskt vissa stabilitetsmarginaler.

   (c) Överföringsfunktionen från $v(t)$ till $y(t)$ ges av känslighetsfunktionen

$$S(s) = \frac{1}{1 + KG(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1 + K}$$

   Dess förstärkning $|S(i\omega)|$ återfinns nedan för $K = 10$ (heldragen), $K = 20$ (streckad) och $K = 30$ (streck-prickad). Minimal inverkan av $v(t) = \sin t$ fås då $|S(i)|$ minimeras vilket sker för $K = 30$.



   (d) Kravet $|S(i\omega)| < 2 \ \forall w$ motsvarar en maxförstärkning på 6 dB, vilket endast uppfylls då $K = 10$.

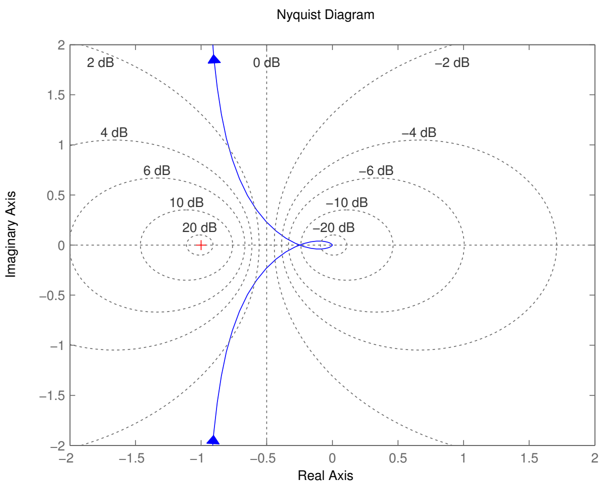
2. (a) Olinjäriteten begränsas av räta linjer med lutningar $k_1 = 0$ respektive $k_2 = 1/a$. Enligt cirkelkriteriet måste $G(i\omega)$ ligga till höger om en lodrät linje genom punkten $-a$. För Nyquistkurvan gäller

$$\Re\left(G(i\omega)\right) = -\frac{16}{(\omega^2 + 4)2}$$

vilket betyder att $\Re\left(G(i\omega)\right) \to -1$ då $\omega \to 0$. Detta ger villkoret $a > 1$ för att cirkelkriteriet skall vara uppfyllt. Med

```
>> nyquist( tf(4, [ 1 4 4 0 ]) )
>> axis( 'square' )
>> axis( [ -2 2 -2 2 ] )
>> grid
```

fås Nyquistkurvan nedan.



(b) För mättningen gäller

$$-\frac{1}{Y_f(C)} = -a, \quad C \leq 1 \qquad \text{och} \qquad -\frac{1}{Y_f(C)} \to -\infty, \quad C \to \infty$$

d v s $-1/Y_f(C)$ utgörs av intervallet $(-\infty, -a]$.
Självsvängning kan förväntas inträffa om $G(i\omega)$ passerar negativa realaxeln i en punkt till vänster om $-a$.

$$\Im\left(G(i\omega)\right) = \frac{4\omega 2 - 16}{\omega(\omega 2 + 4)2} = 0$$

ger $\omega = 2$ och $G(i2) = -1/4$, vilket ger villkoret $a > 1/4$.

(c) För små C sker omcirkling och för stora C sker ej omcirkling, d v s självsvängningen är stabil. När kurvorna skär varandra sker det för $\omega = 2$, vilket innebär att svängningen kommer att ha periodtid $T = \pi$.

3. (a) Underdeterminanter ges av $\frac{1}{s+2}$, $\frac{2}{s+4}$, $\frac{1}{s+1}$, $\frac{1}{s+2}$ samt maximala $\frac{-s^2-3s-4}{(s+2)^2(s+1)(s+4)}$. Mnsta gemensamma nämnare till alla underdeterminanter är $(s+2)^2(s+1)(s+4)$ och är polpolynomet och eftersom maximala underdeterminanten har polpolynomet som nämnare betyder det att $-s^2-3s-4$ definierar nollställepolynomet och vi har således nollställen $-1.5 \pm 1.32i$.

(b) Vid frekvensen noll gäller

$$G(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Systemets RGA beräknas med

```
>> G0=[0.5 0.5;1 0.5];
>> RGA=G0.*(inv(G0))'
RGA =
    -1      2
      2    -1
```

Negativa element på diagonalen indikerar att systemet är svårt att styra med en diagonal regulator.

(c) Vi kan testa $F = G(0)^{-1}$ Med Matlab ger detta

```
>> Gc = minreal(ss(feedback(G*inv(G0),eye(2))));
4 states removed.
>> dcgain(Gc)

ans =

0.5000    0.0000
-0.0000    0.5000

>> step(Gc)

>> pole(Gc)

ans =

-9.8163 + 0.0000i
-1.2395 + 0.9350i
-1.2395 - 0.9350i
-2.7046 + 0.0000i
```

d v s det återkopplade systemet har stabila poler men dålig statisk förstärkning, så vi borde egentligen öka förstärkningen eller inför integralverkan i en mer avancerad regulator $F(s) = G(0)^{-1}F_D(s)$

```
>> F = inv(G0)*[1 + 0.1/s 0;0 1 + 0.1/s]
>> Gc = minreal(ss(feedback(G*F,eye(2))));
>> step(Gc)
```

4. (a) Med tillståndvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = \dot{y}$ fås

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x = Cx$$

(b) Kriteriet $\int_0^\infty \left(y^2(t) + \rho\dot{y}^2(t) + u^2(t)\right) \mathrm{d}t$ kan skrivas $\int_0^\infty \left(x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t)\right) \mathrm{d}t$ där $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ and $Q_2 = 1$ $(M = 1)$.

(c) Det återkloppade systemets polen ges av matrisen

$$(A - BL) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2+\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2+\rho} \end{pmatrix}$$

vars eigenvärden ges av

$$\lambda(\lambda + \sqrt{2+\rho}) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + \sqrt{2+\rho}\lambda + 1 = 0$$

Sätt t.ex. $\sqrt{2+\rho} = K$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 + K\lambda = 0$$

Enligt reglerna för rötter går en rot mot origo (slutpunkt) och en rot mot $-\infty$. Roten som närmar sig origo gör att systemet blir långsammare.

(d)

5. (a) Här gäller

$$A = -1 \qquad N = 1 \qquad C = 1 \qquad R_1 = 1 \qquad R_2 = 1$$

Ekvation (5.79) i läroboken, med $R_{12} = 0$, ger

$$-2P + 1 - P2 = 0$$

med lösningen $P = \sqrt{2} - 1 = 0.41$, vilket alltså är vad variansen för skattningsfelet konvergerar mot.

(b) Med de två matsignalerna kan systemet beskrivas med ekvationerna

$$\dot{x}(t) = -x(t) + v_1(t)$$

som tidigare, och med mätsignalekvationerna

$$y(t) = Cx(t) + v_2(t)$$

där

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2(t) = \begin{pmatrix} v_{2,1}(t) \\ v_{2,2}(t) \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Ekvationen för P blir nu (vi har att $C^T R_2^{-1} C = 1 + \epsilon^{-1}$)

$$-2P + 1 - (1 + \epsilon^{-1}) P^2 = 0$$

med positivt semidefinit lösning $P = \frac{-\epsilon + \sqrt{\epsilon(1+2\epsilon)}}{1+\epsilon}$. Halva variansen erhålls då $P = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, vilket sker ungefär då $\epsilon = 0.079$.