Lektion 3

3.1 I denna uppgift ska vi undersöka strukturen på en krets admittansmatris, samt se hur den kan användas för att bestämma strömmarna i kretsen. Uppgiften är ta fram admittansmatrisen för kretsen neda samt beskriva strömmarna $\bar{I}_1$ och $\bar{I}_2$ med hjälp av den. Kända storheter är spänningarna $\bar{U}_1$ och $\bar{U}_2$, samt impedanserna $z_{12} = z_{21}$, z_{1G}, och z_{2G}.

a) Bekanta dig med nomenklaturen i figuren, framförallt betydelsen av indexen 12, 21, $1G$, samt $2G$.

b) Bestäm uttryck för strömmarna $\bar{I}_{12}$, $\bar{I}_{21}$, $\bar{I}_{1G}$, samt $\bar{I}_{2G}$, i termer av de kända storheterna.

c) Skriv om uttrycken från b) med admittanser (y) istället för impedanser (z).

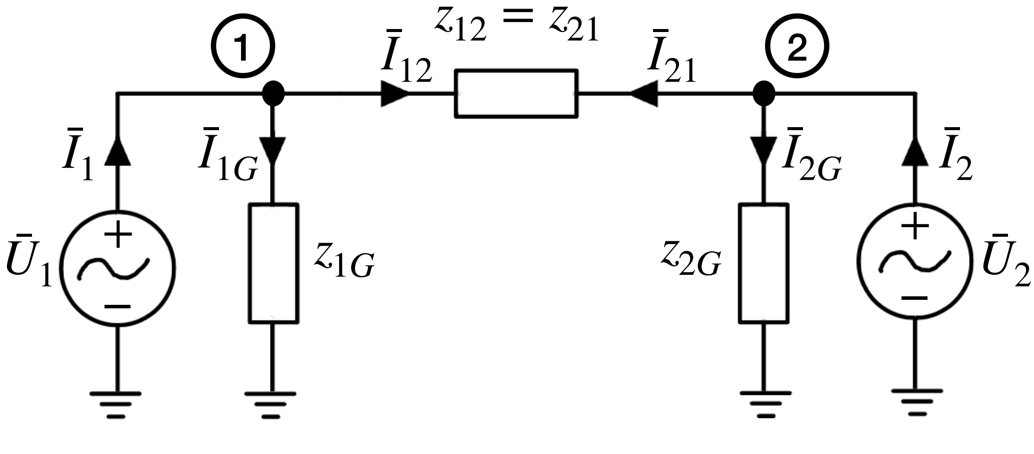
d) Använd svaret från c) samt Kirchhoffs strömlag för att hitta uttryck för strömmarna $\bar{I}_1$ och $\bar{I}_2$.

e) Visa att svaret från d) kan skrivas om på formen

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

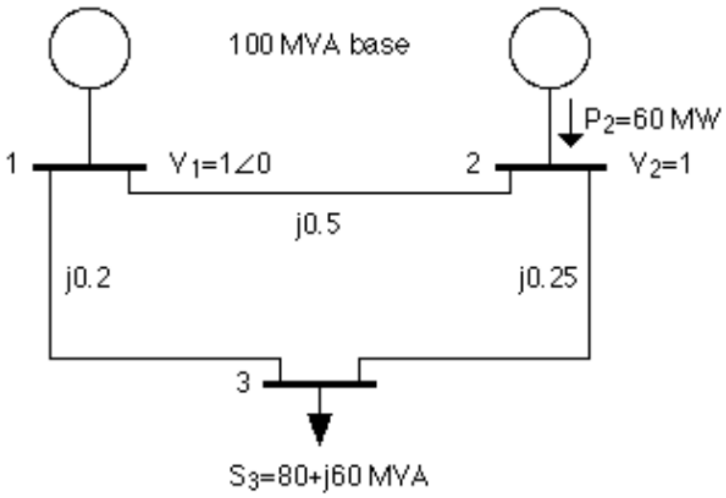
genom att definiera matrisen Y på lämpligt sätt. Ser du någon fördel med att använda admittanser?

f) Reflektera över strukturen på admittansmatrisen Y. Vad kan man säga om elementen på dess diagonal och vad kan man säga om övriga element? Vad händer till exempel om endast en spänning är nollskild?



Figur 1: Figur till övning 3.1.

3.2 Sätt upp 3x3 admittansmatrisen i per enhet för systemet nedan. Impedanserna är angivna i per enhet. (Spänningarna och effekterna givna i figuren används inte för att lösa uppgiften).



Figur 2: Figur till övning 3.2.

3.3 Använd systemet i Figur 2 för att svara på följande frågor.

a) Klassificera bussarna som *slack buss*, *PV-buss* (generator) eller *PQ-buss* (last/konsument).

b) Avgör för varje buss om spänningen storlek och fasvinkel är kända eller inte.

c) Avgör för varje buss om totalt tillförd aktiv och reaktiv effekt är känd eller inte.

3.4 Rita en krets som har admittansmatrisen nedan. Numrera bussarna 1-4 så att de stämmer överens med raderna och kolumnerna i matrisen. Notera att induktansen har positiv impedans $j\omega L$, men negativ admittans eftersom $1/(j\omega L) = -j/(\omega L)$.

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} 0.1 - j10 & 0 & 0 & j10 \\ 0 & 0.2 - j5 & 0 & j5 \\ 0 & 0 & 0.25 - j5 & j5 \\ j10 & j5 & j5 & -j20 \end{bmatrix} \Omega^{-1}$$

3.5 När man studerar ett transmissionsnät är det vanligt att på konsumentsidan specificera önskad effekt (aktiv och reaktiv), och att på generatorsidan specificera spänningen. I denna uppgift ska vi studera enlinjeschemat i figuren nedan där två bussar, buss 1 och buss 2, är sammankopplade med en transmissionsledning med impedans z_{line}. Buss 1 är en slack-buss där spänningen $\bar{U}_1$ är given, och buss 2 är en PQ-buss med effekterna P_2 och Q_2. Uppgiften är att undersöka hur effekten som generatorn vid buss 1 måste leverera, för att efterfrågan hos buss 2 ska mötas kan beräknas, beräknas med hjälp av admittansmatrisen.

Som stöd för att teckna admittansmatrisen visar figuren även motsvarande krets. I kretsen modelleras buss 1 en spänningskälla med spänning $\bar{U}_1$ som tidigare. Buss 2 är däremot inte lika enkel att modellera då effekterna P_2 och Q_2 inte kan översättas direkt till någon komponent. För att kringgå detta så ansätter vi i stället spänningen $\bar{U}_2$ över bussen samt strömmen $\bar{I}_2$ genom den, detta gör att vi kan hantera den på samma sätt som en spänningskälla när vi tecknar admittansmatrisen. Givna storheter är $\bar{U}_1$, z_{load}, P_2, samt Q_2.

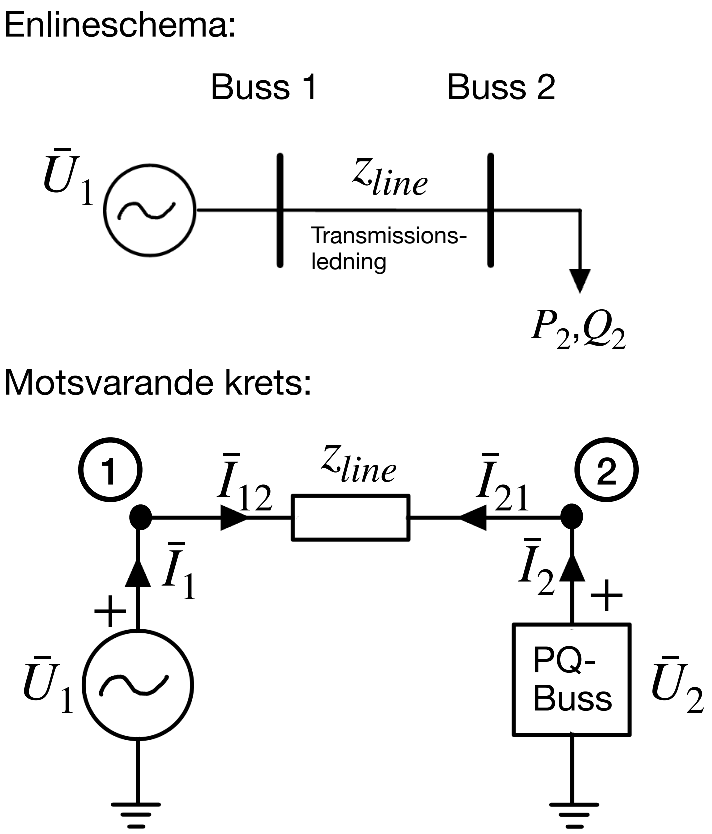
a) Ta fram ett uttryck för admittansmatrisen samt teckna ett uttryck för strömmarna $\bar{I}_1$ och $\bar{I}_2$, likt (1) i uppgift 3.1 e).

b) Hur många ekvationer samt hur många okända finns i uttrycket från a)? Är systemet lösbart?

c) Teckna uttryck för den skenbara effekten $\bar{S}_2$, dels som funktion av $\bar{I}_2$ och $\bar{U}_2$ och dels som funktion av effekterna P_2 och Q_2.

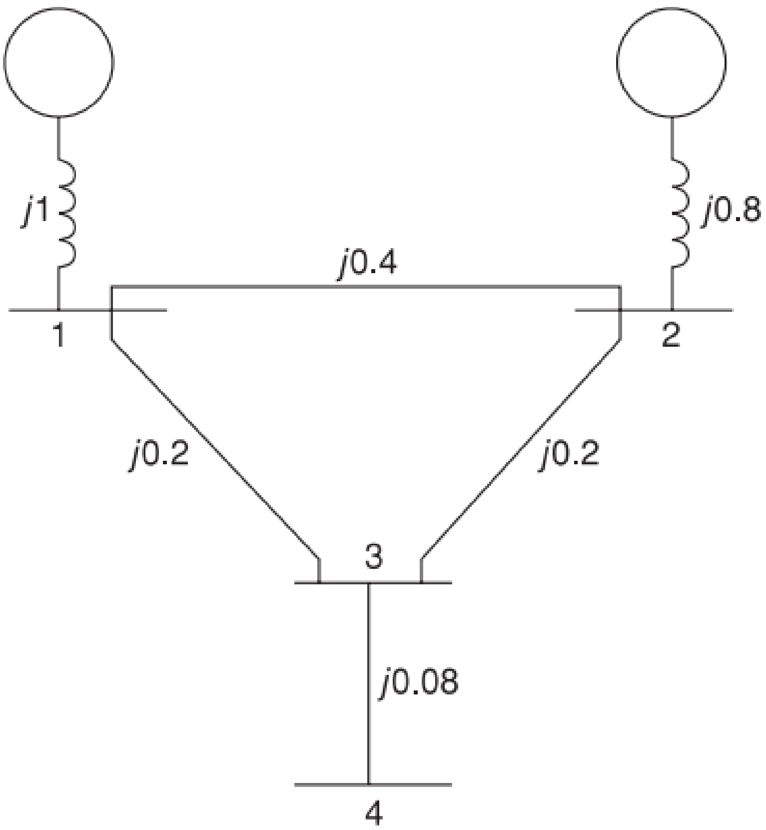
d) Hur många ekvationer samt hur många okända finns det i uttrycken från a) och c) tillsammans? Är systemet lösbart (inga beräkningar behöver göras utan ett motiverande resonemang räcker)?

e) Bestäm ett uttryck för effekten som generatorn vid buss 1 måste leverera, givet att strömmarna $\bar{I}_1$ och $\bar{I}_2$ är kända.



Figur 3: Figur till övning 3.5.

3.6 Givet enlinjeschemat av ett enkelt system som visas i figuren nedan, rita admittansdiagramet för systemet och ta fram 4x4 bus admittansmatrisen $\mathbf{Y}_{bus}$. Metodiken för att bygga admittansmatrisen bygger på att källorna är direkt kopplade till bussarna, för att man vill bestämma strömmen från alla källor in till bussen. En spänningskälla i serie med impedans kan göras om till en strömkällar parallellt med en impedans.



Figur 4: Figur till övning 3.6.

Facit

3.1 a) Indexet 12 betecknar 'från nod 1 till nod 2' och $1G$ betecknar 'från nod 1 till jord (Ground)'

b)

$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{U}_1 - \bar{U}_2}{z_{12}} \; \left(= -\bar{I}_{21}\right), \qquad \bar{I}_{21} = \frac{\bar{U}_2 - \bar{U}_1}{z_{21}} \; \left(= -\bar{I}_{12}\right)$$

$$\bar{I}_{1G} = \frac{\bar{U}_1}{z_{1G}}, \qquad \bar{I}_{2G} = \frac{\bar{U}_2}{z_{2G}}$$

c)

$$\bar{I}_{12} = y_{12}(\bar{U}_1 - \bar{U}_2), \qquad \bar{I}_{21} = y_{21}(\bar{U}_2 - \bar{U}_1)$$

$$\bar{I}_{1G} = y_{1G}\bar{U}_1, \qquad \bar{I}_{2G} = y_{2G}\bar{U}_2$$

d) Nod 1:

$$0 = \bar{I}_1 - \bar{I}_{12} - \bar{I}_{1G} \Rightarrow \bar{I}_1 = \bar{I}_{12} + \bar{I}_{1G} = y_{12}(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) + y_{1G}\bar{U}_1$$

Nod 2:

$$0 = \bar{I}_2 - \bar{I}_{21} - \bar{I}_{2G} \Rightarrow \bar{I}_2 = \bar{I}_{21} + \bar{I}_{2G} = y_{21}(\bar{U}_2 - \bar{U}_1) + y_{2G}\bar{U}_2$$

e)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{12}(\bar{U}_1 - \bar{U}_2) + y_{1G}\bar{U}_1 \\ y_{21}(\bar{U}_2 - \bar{U}_1) + y_{2G}\bar{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{12} + y_{1G})\bar{U}_1 - y_{12}\bar{U}_2 \\ (y_{21} + y_{2G})\bar{U}_2 - y_{21}\bar{U}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_{12} + y_{1G} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{21} + y_{2G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En fördel med att använda admittanser är att strömmar då kan skrivas som produkter mellan admittanser och spänningar vilket resulterar i ett bekvämt uttryck när spänningen sedan bryts ut.

f) För en krets med K noder är admittansmatrissen en kvadratisk matris med K rader och kolumner, och kan där med skrivas som

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \cdots & Y_{1,K} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \cdots & Y_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{K,1} & Y_{K,2} & \cdots & Y_{K,K} \end{bmatrix}.$$

Varje rad m i admittansmatrisen hör till nod m:s källström ($\bar{I}_m$, strömmen som går genom spänningskällan i detta fall), och varje kolumn n hör till buss n:s spänning ($\bar{U}_n$). Man kan se det som att elementet $Y_{m,n}$, på position (m, n), beskriver hur spänning $\bar{U}_n$ påverkar strömmen $\bar{I}_m$ på följande vis:

- För ett element som inte ligger på diagonalen ($m \neq n$) motsvarar $Y_{m,n}$ den negerade admittansen mellan nod m och n ($-y_{12}$ eller $-y_{21}$ i detta fall)
  - Skulle elementet vara noll ($Y_{m,n} = 0$) betyder det att det saknas anslutning mellan nod m och n.
- För ett element som ligger på diagonalen ($m = n$) så motsvarar $Y_{m,n}$ summan av alla admittanser som är direkt kopplade till nod m ($= n$).
  - Man kan också se det som att diagonalelementet (m, m) är summan av nod n:s admittans till jord och admittanserna till övriga noder, d.v.s.

$$Y_{m,m} = y_{mG} + \sum_{n \neq m} y_{mn}$$

  - Detta betyder också att summan av alla element på rad m i admittansmatrisen motsvarar admittansen mellan jord och nod m, d.v.s

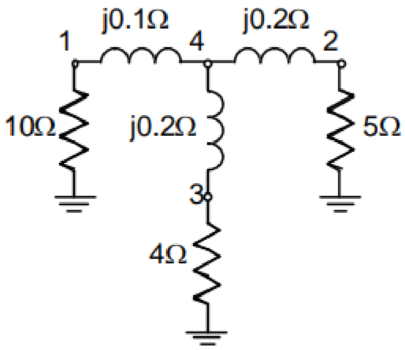
$$y_{mG} = \sum_{n=1}^{K} Y_{m,n}$$

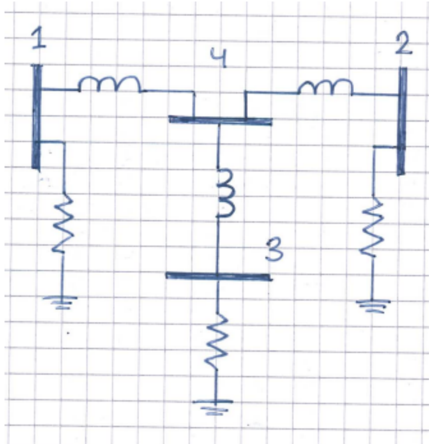
3.2 $Y_{bus} = j \begin{bmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ p.u.

3.3

Bus	1	2	3
a)	slack	PV	PQ
b)	V_1 and θ_1 known	V_2 known θ_2 unknown	V_3 and θ_3 unknown
c)	P_1 and Q_1 unknown	P_2 known Q_2 unknown	P_3 and Q_3 known

3.4





Figur 5: Alternativa lösningar till övning 3.4.

3.5 a)

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{line} & -y_{line} \\ -y_{line} & y_{line} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}$$

b) Uttrycket är en matrisekvation med två rader, vilket motsvarar två ekvationer. De okända storheterna är $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, och $\bar{U}_2$, därmed tre stycken. Eftersom uttrycken är komplexvärda kan man även bryta upp alla ekvationer i två, en för realdelen och en för imaginärdelen; då fås istället 4 ekvationer och 6 okända. Eftersom antalet okända är större än antalet ekvationer är systemet inte lösbart.

c)

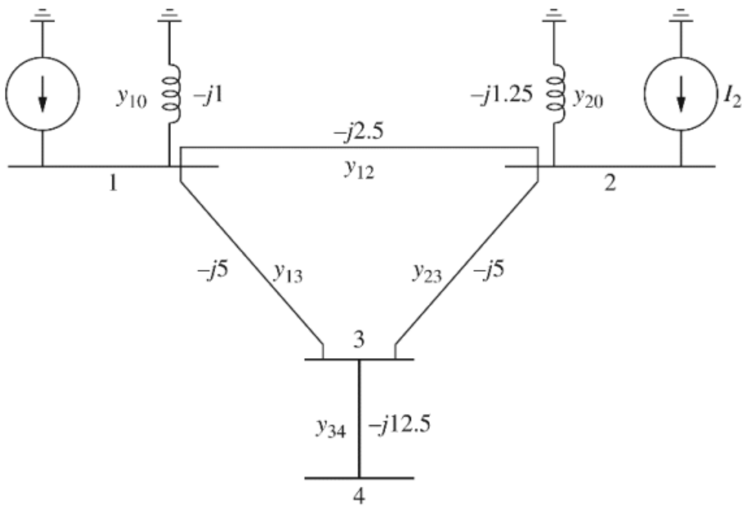
$$\bar{S}_2 = \bar{U}_2 \bar{I}_2^*$$
$$\bar{S}_2 = P_2 + jQ_2$$

d) Antalet ekvationer i c) är två, och tillsammans med ekvationerna från a) får vi alltså 4 ekvationer. Antalet okända är nu också 4 ($\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{U}_2$, och $\bar{S}_2$), och systemet bör vara lösbart (och det går att visa att så är fallet).

e) Den skenbara effekten som generatorn måste producera är $\bar{S}_1 = \bar{U}_1 \bar{I}_1^* = -\bar{U}_1 \bar{I}_2^*$.

3.6

The admittance diagram for the system is shown below:



$$\bar{Y}_{BUS} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{13} & \bar{Y}_{14} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \bar{Y}_{23} & \bar{Y}_{24} \\ \bar{Y}_{31} & \bar{Y}_{32} & \bar{Y}_{33} & \bar{Y}_{34} \\ \bar{Y}_{41} & \bar{Y}_{42} & \bar{Y}_{43} & \bar{Y}_{44} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -8.5 & 2.5 & 5.0 & 0 \\ 2.5 & -8.75 & 5.0 & 0 \\ 5.0 & 5.0 & -22.5 & 12.5 \\ 0 & 0 & 12.5 & -12.5 \end{bmatrix} S$$

where $\quad \bar{Y}_{11} = \bar{y}_{10} + \bar{y}_{12} + \bar{y}_{13};\ \bar{Y}_{22} = \bar{y}_{20} + \bar{y}_{12} + \bar{y}_{23};\ \bar{Y}_{23} = \bar{y}_{13} + \bar{y}_{23} + \bar{y}_{34}$

$\bar{Y}_{44} = y_{34};\ \bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21} = -\bar{y}_{12};\ \bar{Y}_{13} = \bar{Y}_{31} = -\bar{y}_{13};\ \bar{Y}_{23} = \bar{Y}_{32} = -\bar{y}_{23}$

and $\quad \bar{Y}_{34} = \bar{Y}_{43} = -\bar{y}_{34}$