Vehicle Dynamics and Control

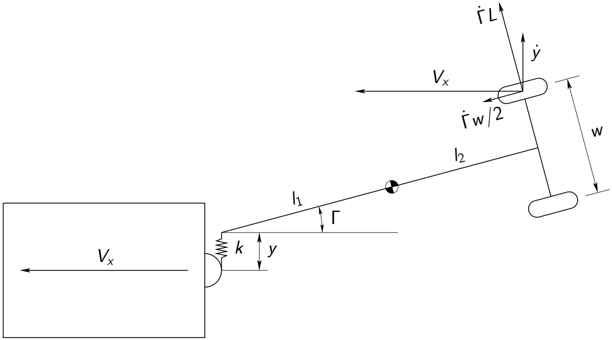
Jan Åslund
jan.aslund@liu.se
Associate Professor

Dept. Electrical Engineering
Vehicular Systems
Linköping University
Sweden

Lecture 8

Stability of a car with a trailer

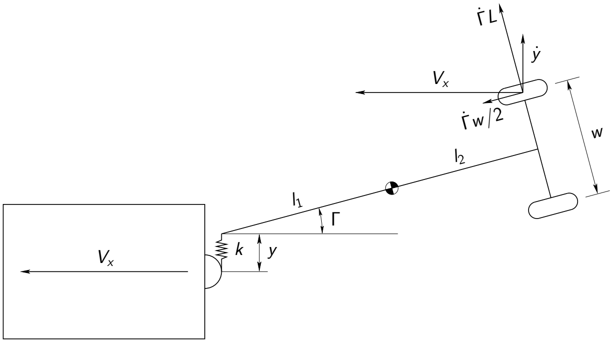
Car with a trailer: Kinematics



The formula $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{AB}$, with A at the hitch and B at the right wheel, gives

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} V_x \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\Gamma} \end{pmatrix} \times \left(L \begin{pmatrix} -\cos\Gamma \\ \sin\Gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w}{2} \begin{pmatrix} \sin\Gamma \\ \cos\Gamma \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

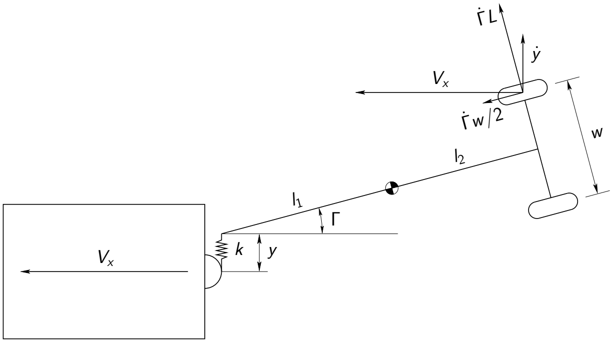
Car with a trailer: Kinematics



Calculate the cross-product:

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} V_x \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + L\dot{\Gamma} \begin{pmatrix} \sin\Gamma \\ \cos\Gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w\dot{\Gamma}}{2} \begin{pmatrix} \cos\Gamma \\ -\sin\Gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

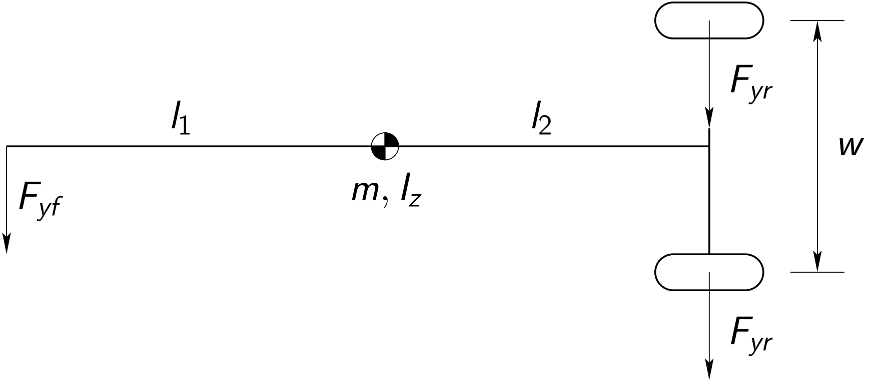
Car with a trailer: Kinematics



Approximation of the slip angle

$$\alpha \approx \frac{\Gamma V_x + \dot{\Gamma} L + \dot{y}}{V_x} = \Gamma + \frac{\dot{\Gamma} L}{V_x} + \frac{\dot{y}}{V_x}$$

Car with a trailer: Forces acting on the trailer



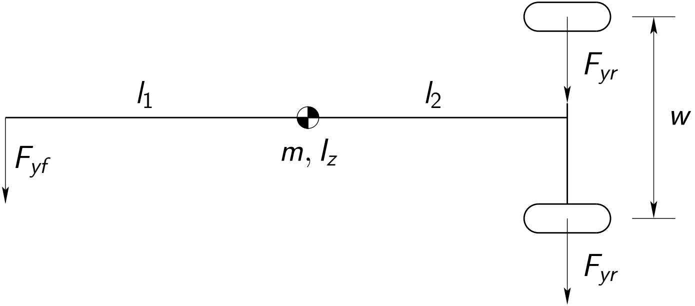
Model for spring stiffness:

$$F_{yf} = ky$$

Model for tire force:

$$F_{yr} = C_\alpha \alpha = C_\alpha \left(\Gamma + \frac{\dot{\Gamma} L}{V_x} + \frac{\dot{y}}{V_x} \right)$$

Car with a trailer: Equations of motion



$$m\left(\ddot{y} + l_1\ddot{\Gamma}\right) = -F_{yf} - 2F_{yr} = -ky - 2C_\alpha\left(\Gamma + \frac{\dot{\Gamma}L}{V_x} + \frac{\dot{y}}{V_x}\right)$$

$$I_z\ddot{\Gamma} = l_1F_{yf} - 2l_2F_{yr} = l_1ky - 2l_2C_\alpha\left(\Gamma + \frac{\dot{\Gamma}L}{V_x} + \frac{\dot{y}}{V_x}\right)$$

Car with a trailer

From the previous slide:

$$m\left(\ddot{y}+l_1\ddot{\Gamma}\right)=-F_{yf}-2F_{yr}=-ky-2C_\alpha\left(\Gamma+\frac{\dot{\Gamma}L}{V_x}+\frac{\dot{y}}{V_x}\right)$$

$$I_z\ddot{\Gamma}=l_1F_{yf}-2l_2F_{yr}=l_1ky-2l_2C_\alpha\left(\Gamma+\frac{\dot{\Gamma}L}{V_x}+\frac{\dot{y}}{V_x}\right)$$

In matrix form

$$\begin{pmatrix} ml_1 & m \\ I_z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\Gamma} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}+\frac{1}{V_x}\begin{pmatrix} 2C_\alpha L & 2C_\alpha \\ 2l_2C_\alpha L & 2l_2C_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{y} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2C_\alpha & k \\ 2l_2C_\alpha & -l_1k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Car with a trailer

In matrix form

$$\begin{pmatrix} ml_1 & m \\ I_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\Gamma} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \frac{1}{V_x} \begin{pmatrix} 2C_\alpha L & 2C_\alpha \\ 2l_2 C_\alpha L & 2l_2 C_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Gamma} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2C_\alpha & k \\ 2l_2 C_\alpha & -l_1 k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assume that the solution is in the form $\mathbf{x}(t) = e^{st}\mathbf{X}$ where s i a constant, possibly complex a number, and $\mathbf{X}$ is a constant vector. Substitute it into the system of differential equations:

$$e^{st} \begin{pmatrix} ml_1 s^2 + (2C_\alpha L/V_x)s + 2C_\alpha & ms^2 + (2C_\alpha/V_x)s + k \\ I_z s^2 + (2l_2 C_\alpha L/V_x)s + 2l_2 C_\alpha & (2l_2 C_\alpha/V_x)s - l_1 k \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

There exists a non-trivial solution $\mathbf{X}$ of the homogeneous system of equations if and only if s satisfies the characteristic equation:

$$mI_z s^4 + \frac{2C_\alpha}{V_x}(I_z + ml_2^2)s^3 + (k(I_z + l_1^2 m) + ml_2 C_\alpha)s^2 + \frac{2C_\alpha}{V_x}kL^2 + 2C_\alpha Lk = 0$$

Car with a trailer: Routh's stability criterion

Third order equation:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

The Routh array:

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \\ \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & 0 \\ a_3 & 0 \end{array}$$

All solutions in the left half-plane if and only if $a_0, a_1, a_3 > 0$, and $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Car with a trailer: A third-order model, stability

Determinant:

$$mI_z s^4 + \frac{2C_\alpha}{V_x}(I_z + ml_2^2)s^3 + (k(I_z + l_1^2 m) + ml_2 C_\alpha)s^2 + \frac{2C_\alpha}{V_x}kL^2 s + 2C_\alpha Lk = 0$$

Assume that C_α is large and $I_z = m\kappa^2$

$$\frac{2(I_z + ml_2^2)}{V_x}s^3 + ml_2 s^2 + \frac{2kL^2}{V_x}s + 2Lk = 0$$

The Routh's stability criterion gives

$$\frac{2kmL}{V_x}(l_2 L - (\kappa^2 + l_2^2)) > 0$$

and

$$l_1 l_2 > \kappa^2$$

i.e., the center of percussion should be located in front of the axle of the trailer.

Car with a trailer: A third-order model, stability

Add damping at the hitch

$$M = C\dot{\Gamma}$$

where C is an effective rotary damping constant.

$$\frac{2(m\kappa^2 + ml_2^2)}{V_x}s^3 + (C/V_x + ml_2)s^2 + \frac{2kL^2}{V_x}s + 2Lk = 0$$

The Routh's stability criterion

$$\frac{2kmL}{V_x}\left(\frac{CL}{mV_x} + l_2L - (\kappa^2 + l_2^2)\right) > 0$$

$$\frac{CL}{mV_x} + l_1 l_2 > \kappa^2$$

Not fulfilled if $l_1 l_2 < \kappa^2$

$$V_x \geq \frac{CL}{m(\kappa^2 - l_1 l_2)}$$

Laterala och longitudinella krafter

Vi har hittills studerat laterala och longitudinella krafter separat.

Fallet med både laterala och longitudinella krafter är mer komplext.

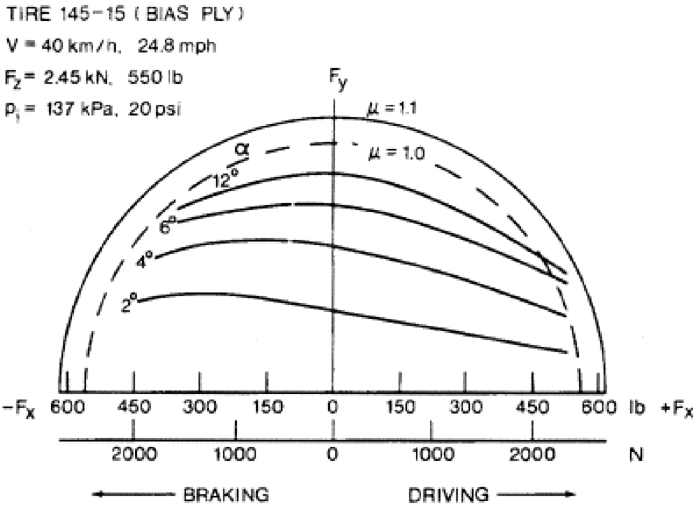
Figur 1.39 visar hur sambandet mellan dessa krafter och avdriftsvinkeln kan se ut.

En enkel modell för sambandet mellan F_x, F_y och α är att anta att kurvorna i figuren är ellipser.

När vi konstruerar ellipserna utgår vi från att följande är känt:

- Sambandet mellan F_y och α i fallet $F_x = 0$.
- F_{xmax} i fallet $F_y = 0$.

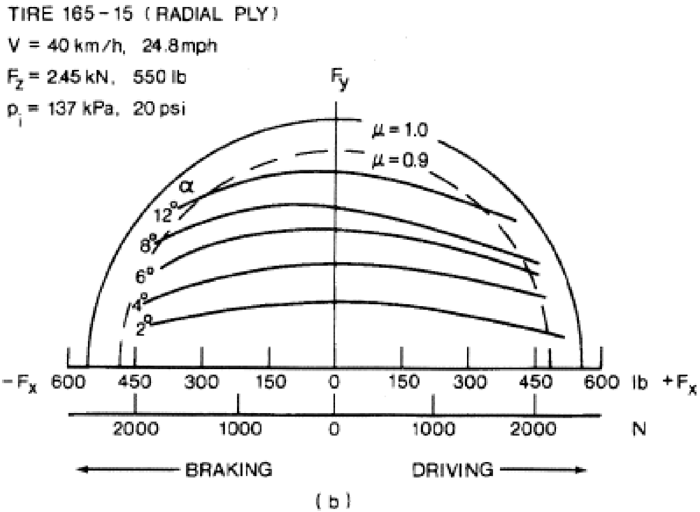
Figur 1.39a



TIRE 145−15 (BIAS PLY)
V = 40 km/h, 24.8 mph
F_z = 2.45 kN, 550 lb
p_i = 137 kPa, 20 psi
F_y
μ = 1.1
μ = 1.0
α
12°
6°
4°
2°
$-F_x$
600
450
300
150
0
150
300
450
600
lb
$+F_x$
2000
1000
0
1000
2000
N
BRAKING
DRIVING

(a)

Figur 1.39b


TIRE 165 - 15 (RADIAL PLY)
V = 40 km/h, 24.8 mph
F_z = 2.45 kN, 550 lb
p_i = 137 kPa, 20 psi
F_y
μ = 1.0
μ = 0.9
α
12°
8°
6°
4°
2°
- F_x 600 450 300 150 0 150 300 450 600 lb + F_x
2000 1000 0 1000 2000 N
BRAKING
DRIVING
(b)

Friktionsellipsen: Arbetsgång

Arbetsgång:

1) Givet en avdriftsvinkel α beräknas $F_{y\alpha}$ då $F_x = 0$, t.ex. genom att läsa av figur 1.23 eller motsvarande.

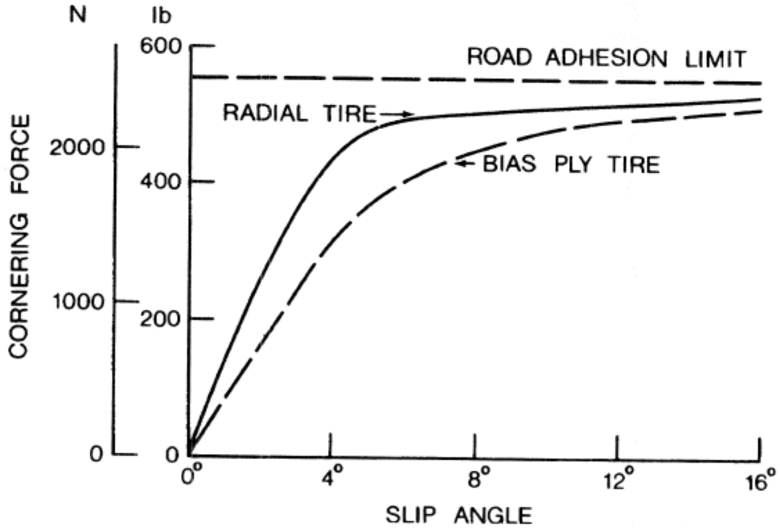
2) Maximala longitudinella kraften F_{xmax} i fallet $F_y = 0$ är känd.

3) F_{xmax} och $F_{y\alpha}$ är halvaxlarna i ellipsen

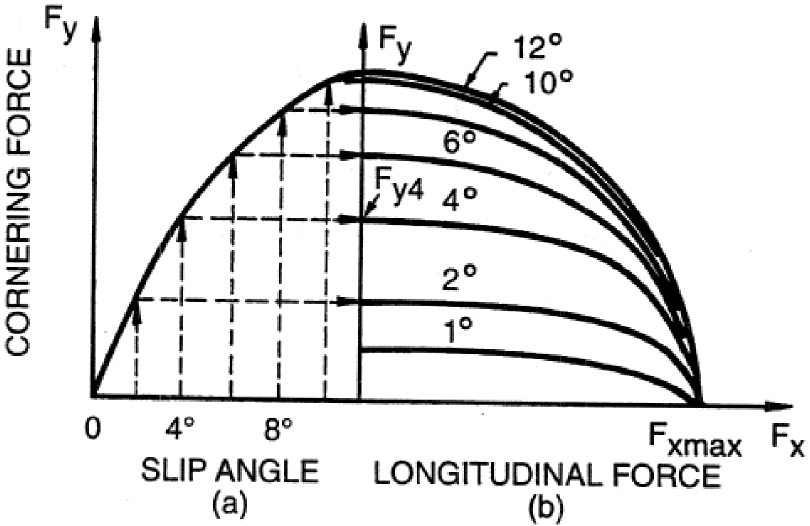
$$(F_y/F_{y\alpha})^2 + (F_x/F_{xmax})^2 = 1$$

Figur 1.42 illustrerar hur ellipserna ges av F_{xmax} och kurvan $F_y(\alpha)$.

Figur 1.23


N
lb
600
400
200
0
2000
1000
0
CORNERING FORCE
ROAD ADHESION LIMIT
RADIAL TIRE
BIAS PLY TIRE
0°
4°
8°
12°
16°
SLIP ANGLE

Figur 1.42

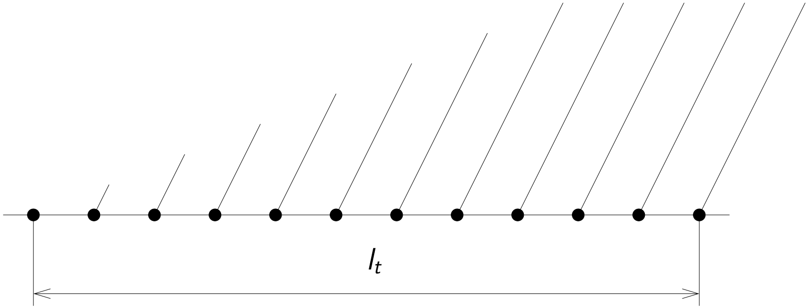


CORNERING FORCE
Fy
Fy
12°
10°
6°
Fy4
4°
2°
1°
0
4°
8°
SLIP ANGLE
(a)
Fxmax
Fx
LONGITUDINAL FORCE
(b)

Borstmodellen

Tidigare har vi använt borstmodellen för lateral och longitudinella krafter separat. Modellen går lätt att utvidga till det allmänna fallet.

Grundläggande idéer:



Borstmodellen

Longitudinell förskjutning

$$e(x) = \frac{i_s}{1 - i_s} x$$

Lateral förskjutning

$$y'(x) = (x + e(x)) \tan \alpha \approx \frac{\alpha}{1 - i_s} x$$

Longitudinell kraft med linjär modell:

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{k_t i_s}{1 - i_s} x$$

Lateral kraft med linjär modell

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{k_y' \alpha}{1 - i_s} x$$

Borstmodellen

Friktionsmodell:

$$\sqrt{\left(\frac{dF_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF_y}{dx}\right)^2} \leq \mu \frac{W}{l_t}$$

I vilozonen:

$$\sqrt{\left(\frac{k_t i_s}{1 - i_s}\right)^2 + \left(\frac{k_y' \alpha}{1 - i_s}\right)^2} \cdot x \leq \frac{\mu W}{l_t}$$

Borstmodellen

Längden på vilozonen ges av

$$\frac{l_c}{l_t} = \frac{\mu W(1 - i_s)}{2\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

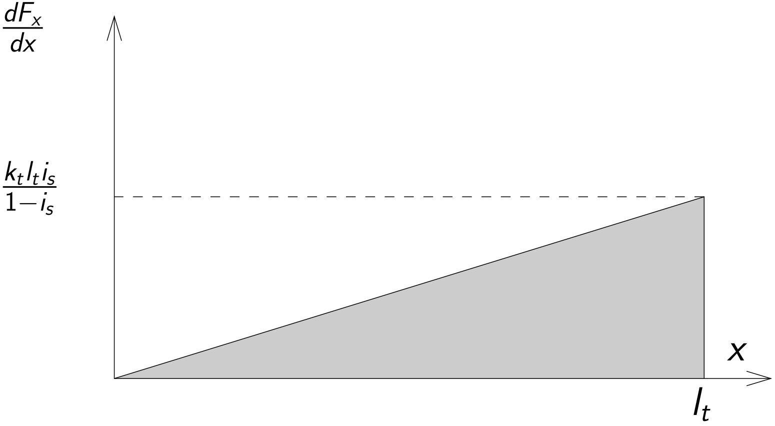
där

$$C_s = \frac{k_t {l_t}^2}{2}$$

$$C_\alpha = \frac{k'_y {l_t}^2}{2}$$

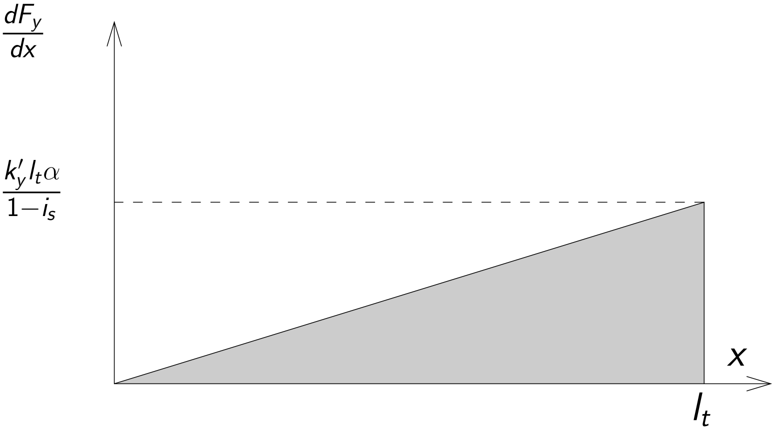
Om $l_c/l_t \geq 1$ så finns ingen glidzon

Borstmodellen: Utan glidzon



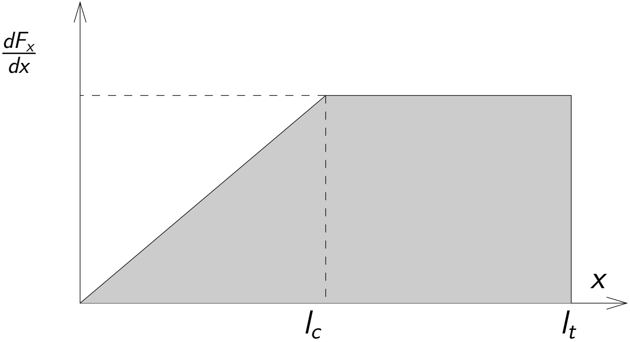
$$F_x = \frac{1}{2}\frac{k_t i_s l_t}{1 - i_s} l_t = C_s \frac{i_s}{1 - i_s}$$

Borstmodellen: Utan glidzon



$$F_y = \frac{1}{2}\frac{k'_y \alpha l_t}{1-i_s} l_t = C_\alpha \frac{\alpha}{1-i_s}$$

Borstmodellen: Med glidzon

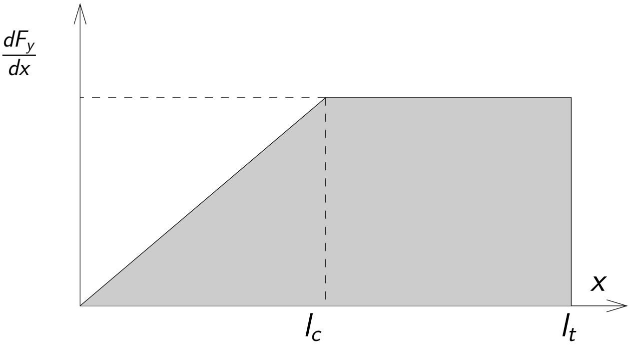


I glidzonen gäller att

$$\frac{dF_x}{dx} = \frac{\mu W}{l_t} \frac{C_s i_s}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

Kraften F_x ges av den skuggade arean under kurvan

Borstmodellen: Med glidzon



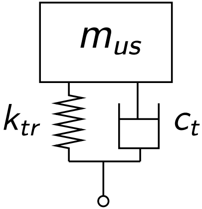
I glidzonen gäller att

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{\mu W}{l_t} \frac{C_\alpha \alpha}{\sqrt{(C_s i_s)^2 + (C_\alpha \alpha)^2}}$$

Kraften F_y ges av den skuggade arean under kurvan

Däckmodeller

En enkel däckmodell med en fjäder och en dämpare:



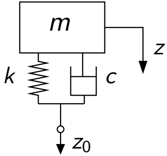
Parametrarna k_{tr} och c_t måste identifieras.

Tre intressanta fall:

- Statisk styvhet
- Dynamisk styvhet för ickerullande hjul
- Dynamisk styvhet för rullande hjul

Kvartsbilsmodell: Exempel

Betraktar en kvartbilsmodell med en fjädrad massa $m = 450\ kg$, en fjäder med fjäderkonstant $k = 25\ kN/m$ och en dämpare med dämpkonstant $c = 2\ kNs/m$.



Bilen kör på en sinusformad väg med våglängd $\lambda = 20\ m$ och amplitud $A = 5\ cm$ och håller hastigheten $v = 60\ km/h$. Vilka värden kommer kraften mellan däck och väg att variera mellan?

Exempel

Frekvensen för svängningen är

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = 5.34 rad/s$$

Dynamisk modell:

$$\ddot{z} = -c(\dot{z} - \dot{z}_0) - k(z - z_0)$$

vilket ger överföringsfunktion från z_0 till kraften $F = m\ddot{z}$:

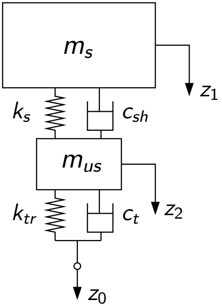
$$G(s) = \frac{ms^2(cs + k)}{ms^2 + cs + k}$$

Kraften svänger med amplituden $|G(i\omega)|A$ och totala kraften mellan däck och underlag varierar mellan

$$mg - |G(i\omega)|A = 3.4\ kN \text{ och } mg + |G(i\omega)|A = 5.4\ kN$$

Kvartsbilsmodell

En modell med den fjädrade massan m_s (karossmassa) och den ofjädrade massan m_{us} (hjul- och axelmassa).



Dynamiska ekvationer

$$m_s \ddot{z}_1 + c_{sh}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_s(z_1 - z_2) = 0$$
$$m_{us} \ddot{z}_2 + c_{sh}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_s(z_2 - z_1) + c_t \dot{z}_2 + k_{tr} z_2 = c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0$$

Odämpat system

Utan dämpning och med $z_0 = 0$ får vi

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_1 + k_s z_1 - k_s z_2 &= 0 \\ m_{us} \ddot{z}_2 - k_s z_1 + (k_s + k_{tr}) z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kan skrivas

$$M\ddot{\mathbf{z}} + A\mathbf{z} = 0$$

där matriserna

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{us} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_{tr} \end{bmatrix}$$

är positivt definita och symmetriska.

Odämpat system

Systemet har lösningar på formen:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= Z_1 \cos(\omega_n t - \varphi) \\
z_2 &= Z_2 \cos(\omega_n t - \varphi)
\end{aligned}
$$

Vinkelfrekvenserna ω_n ges av den karakteristiska ekvationen

$$\det(-\omega_n^2 M + A) = 0$$

och egenvektorerna

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

ges av det homogena ekvationssystemet

$$(-\omega_n^2 M + A)Z = 0$$

Odämpat system

Lösningarna till den karakteristiska ekvationen ges av

$$\omega_n^2 = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$$

där

$$\begin{aligned} A_1 &= m_s m_{us} \\ B_1 &= m_s k_s + m_s k_{tr} + m_{us} k_s \\ C_1 &= k_s k_{tr} \end{aligned}$$

Ofta är konstanterna k_s, m_{us} små jämfört med k_{tr} resp. m_s.

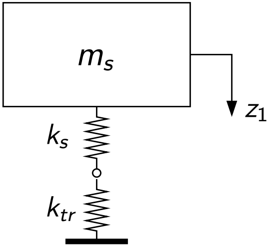
Odämpat system: Approximation

För första lösningen fås approximationen

$$\omega_{n1}^2 = \frac{B_1 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1} = \frac{2C_1}{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}$$

$$\approx \frac{C_1}{B_1} \approx \frac{k_s k_{tr}}{m_s k_s + m_s k_{tr}} = \frac{(1/k_s + 1/k_{tr})^{-1}}{m_s}$$

Samma vinkelhastighet som för två seriekopplade fjädrar och en massa m_s:

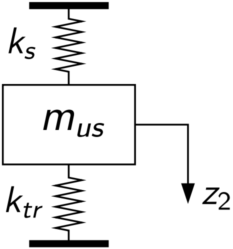


Odämpat system: Approximation

Approximation av den andra vinkelhastigheten:

$$\omega_{n2}^2 = \frac{B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1} \approx \frac{B_1}{A_1}$$
$$\approx \frac{m_s k_s + m_s k_{tr}}{m_s m_{us}} = \frac{k_s + k_{tr}}{m_{us}}$$

Samma som för två parallellkopplade fjädrar och en massa m_{us}:



Dämpat system

Tar vi med dämpning får vi systemet

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\dot{\mathbf{z}} + A\mathbf{z} = \mathbf{f}(t)$$

där

$$C = \begin{bmatrix} c_{sh} & -c_{sh} \\ -c_{sh} & c_{sh} + c_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_t \dot{z}_0 + k_{tr} z_0 \end{pmatrix}$$

Genom att transformera systemet får vi

$$G(s)\mathbf{z}(s) = \mathbf{f}(s)$$

där

$$G(s) = s^2 M + sC + A$$

Dämpat system

Försummar dämpningen i däcket och antar i fortsättningen att $c_t = 0$.

Med

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{tr} z_0(s) \end{pmatrix}$$

får vi sambandet

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{k_{tr}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} -g_{12} z_0 \\ g_{11} z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{01} z_0 \\ G_{02} z_0 \end{pmatrix}$$

Dämpat system: Förstärkning

Om vägprofilen är en harmonisk svängning med amplitud A_0 och vinkelfrekvens ω, så är z_1 och z_2 harmoniska svängningar med amplitud A_1 resp. A_2.

Förstärkningarna ges av:

$$\frac{A_1}{A_0} = |G_{01}(i\omega)| = \left|\frac{k_{tr} g_{12}(i\omega)}{g_{11}(i\omega)g_{22}(i\omega) - g_{12}(i\omega)g_{21}(i\omega)}\right|$$

$$\frac{A_2}{A_0} = |G_{02}(i\omega)| = \left|\frac{k_{tr} g_{11}(i\omega)}{g_{11}(i\omega)g_{22}(i\omega) - g_{12}(i\omega)g_{21}(i\omega)}\right|$$

Dämpat system: Förstärkning

Uttryckt i de ursprungliga storheterna:

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \sqrt{\frac{A_2}{B_2 + C_2}}$$
$$\frac{Z_2}{Z_0} = \sqrt{\frac{A_3}{B_2 + C_2}}$$

där

$$A_2 = (k_s k_{tr})^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2$$
$$A_3 = (k_{tr}(k_s - m_s \omega^2))^2 + (c_{sh} k_{tr} \omega)^2$$
$$B_2 = ((k_s - m_s \omega^2))(k_{tr} - m_{us}\omega^2) - m_s k_s \omega^2)^2$$
$$C_2 = (c_{sh})^2 (m_s \omega^2 + m_{us}\omega^2 - k_{tr})^2$$

Prestanda: Vibrationsisolering

Förstärkning beror av vinkelfrekvensen och detta samband kan åskådliggöras i ett bodediagram med logaritmiska skalor.

Figurerna 7.9–11 visar hur förstärkningen $|G_{01}(i\omega)|$ för den fjädrade massan varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ

Prestanda: Fjädringsamplitud

Som ett mått på hur mycket hjulfjädringen sträcks ut använder vi förstärkningen

$$\frac{\max(z_2 - z_1)}{Z_0} = |G_{02}(i\omega) - G_{01}(i\omega)|$$

Detta uttryck följer från sambandet

$$z_2(s) - z_1(s) = (G_{02}(s) - G_{01}(s))z_0(s)$$

Figurerna 7.12–14 visar hur förstärkningen för den fjädrade massan varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ

Prestanda: Väghållning och hjulhopp

Blir skillnaden $z_0 - z_2$ för stor tappar däcket kontakten mot underlaget.

Figurerna 7.15–17 visar hur förstärkningen

$$\frac{\max(z_0 - z_2)}{Z_0} = |1 - G_{02}(i\omega)|$$

varierar när man ändrar

- Ofjädrade massan m_{us}
- Styvheten för fjädringen k_s
- Dämpfaktorn γ