

**Lösningförslag till Tentamen 2024-01-13**  
**TSFS 17 Elkraftsystem**  
**Denna version genererad: 14 januari 2024, 20:03**

**Uppgift 1.**

**Givet:** Trefasnät:  $f=50$  Hz,  $U_H=400$  V. Fabrik: förbrukning  $P_1 = 40$  kW,  $\cos \phi_1=0.7$ , kondensatorbatteri  $C=120\mu\text{F}$  per fas. Expansion:  $P_2=20$  kW,  $\cos \phi_2=0.65$ .

**Sökt:**

a. Från formelbladet  $P_{3fas} = \sqrt{3}U_H I_L \cos \phi$

$$I_{L,1} = \frac{P_1}{\sqrt{3}U_H \cos \phi_1} = 82.4786 \text{ A}$$

Svar: 82.5 A

b. Vi kan börja med att beräkna den reaktiva effekten från kondensatorbatteriet för en fas (D-koppling:  $U = U_H$ )

$$Q_{cap} = -U^2 \omega C = -U_H^2 2\pi f C = -6.0319 \cdot 10^3 \text{ VAR} = -6.0319 \text{ kVAR}$$

För att beräkna strömmen för hela anläggningen kan samma formel som i tidigare uppgift användas. Summera alla komponenters aktiva effekt

$$P_{tot} = P_1 + P_2 = 60 \text{ kW}$$

Summera alla komponenters reaktiva effekt ( $3Q_{cap}$ , en för varje fas).  $\phi_1 = 0.7954$  rad (ca  $45.6^\circ$ ) och  $\phi_2 = 0.8932$  rad (ca  $49.5^\circ$ ).

$$Q_1 = S_1 \sin(\phi_1) = \frac{P_1}{\cos \phi_1} \sin \phi_1 = 40.808 \text{ kVAR}$$

$$Q_2 = S_2 \sin(\phi_2) = \frac{P_2}{\cos \phi_2} \sin \phi_2 = 23.383 \text{ kVAR}$$

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + 3Q_{cap} = 46.095 \text{ kVAR}$$

Den totala skenbara effekten för anläggningen

$$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2} = 7.5662 \cdot 10^4 \text{ VA}$$

Vilket ger strömmen för hela anläggningen

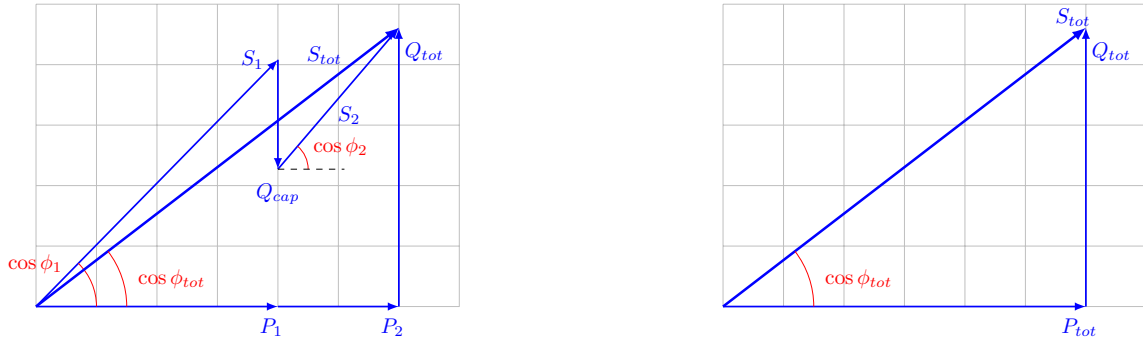
$$I_{L,tot} = \frac{P_{tot}}{\sqrt{3}U_H \cos \phi_{tot}} = \frac{S_{tot}}{\sqrt{3}U_H} = 109.209 \text{ A}$$

Effektfaktorn för hela anläggningen blir

$$\cos \phi_{tot} = \frac{P_{tot}}{S_{tot}} = 0.7930 \text{ (Vinkel } \phi_{tot} \text{ ca } 37.5^\circ)$$

Svar: 109.2 A och  $\cos \phi_{tot} = 0.79$

- c. Rita fasdiagrammet, vill helst se det vänstra men minimalt det högra.



- d. För att få fullständig faskompensation vill vi ha ett kondensatorbatteri som genererar lika stor reaktiv effekt som fabriken förbrukar efter expansionen, dvs det enkla svaret är  $Q_{tot} = 46.095$  kVAR. Det behövs inte för att svara på frågan men det kan ändå vara intressant att veta hur stora kondensatorer som behövs

$$C = \frac{Q_{cap}}{U^2\omega} = 9.1703 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

Svar: Vi behöver  $Q_{tot} = 46.095$  kVAR vilket motsvarar 3 kondensatorer på  $306 \mu\text{F}$  vardera, totalt  $917 \mu\text{F}$ .

- e. Fullständigt faskompensering innebär effektfaktorn  $\cos \phi = 1$

$$I = \frac{P_{tot}}{\sqrt{3}U_H 1} = 86.6025 \text{ A}$$

### Uppgift 2.

**Givet:** Ledningsdata  $X'_L = \omega L' = 0.271$  [ $\Omega/\text{km}$ ],  $Y'_C = \omega C' = 4.33$  [ $\mu\text{S}/\text{km}$ ], och  $R' = 0.028$  [ $\Omega/\text{km}$ ],

**Sökt:**

- a. Karakteristiska impedansen är en ledningsegenskap, den är oberoende av längd och som man kan se i definitionen så förkortas längderna bort när man dividerar under roten  $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Svar: Nej, den är inte beroende av längd.

- b. Från formelbladet beräknas SIL som

$$\text{SIL} = \frac{V_{\text{rated}}^2}{Z_c} = 9.0447 \cdot 10^8 \text{ W}$$

där den karakteristiska impedansen är

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{X'_L/\omega}{Y'_C/\omega}} = \sqrt{\frac{0.271}{4.33 \cdot 10^{-6}}} = 176.8991 \Omega$$

Svar: SIL = 904.5 MW

- c. För att ledningens resistans ska bli lika stor som den karakteristiska impedansen  $R' \cdot l = Z_c$  behöver ledningen vara  $l = 6300$  km lång.

### Uppgift 3.

**Givet:**  $V = 400$  V,  $I = 250$  A,  $V_{th} = 1$  pu,  $Z_{th} = j0.15$  pu,  $Z_{base} = 0.6$  pu

**Sökt:** Spänningen över lasten i både per enhet och volt.

Givet spännings- och impedansbasen,  $V_{base} = 400/\sqrt{3}$  och  $Z_{base} = 0.6$ , kan basen för strömmen tas fram (formelblad:  $Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}}$ )

$$I_{base} = V_{base}/Z_{base} = 384.9 \text{ A}$$

och användas för att beräkna strömmen genom lasten i per enhet (formelblad: Storhet i per enhet = Verkligt värde / Basvärde för storheten)

$$I_{last,pu} = I_{last}/I_{base} = 0.6494 \text{ pu.}$$

Nu är spänning, impedans och ström angivna i per enhet och vi kan använda Kirchoffs spänningslag eller slinganalys för att ta fram ett uttryck för spänningen över lasten  $V_{load}$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{th} - \bar{Z}_{th}I_{last,pu} - \bar{V}_{last} &= 0 \\ \bar{V}_{th} &= \bar{Z}_{th}I_{last,pu} + \bar{V}_{last}\end{aligned}$$

Eftersom lasten är fullständigt faskompenserad kan den ses som en rent resistiv komponent och då kan uttrycket ovan ses som en rätvinklig triangel med basen  $V_{last}$  och höjden  $\text{Imag}\bar{Z}_{th}I_{last,pu}$  (då den är rent imaginär) och hypotenusan  $\bar{V}_{th}$ .

$$\begin{aligned}V_{th}^2 &= V_{last,pu}^2 + (\text{imag}\{Z_{th}\}I_{load,pu})^2 \\ V_{last,pu} &= \sqrt{V_{th}^2 - (\text{imag}\{Z_{th}\}I_{load,pu})^2} = 0.9952\end{aligned}$$

Och detta motsvarar

$$V_{last} = V_{last,pu}V_{base} = 229.8 \text{ V}$$

Svar: Spänningen över lasten är 0.9952 pu vilket motsvarar 229.8 V

#### Uppgift 4.

**Givet:**  $p_{m,pu} = 1$  per enhet innan kortslutning,  $H=3.0$  per enhet-sekunder. Frekvens 50 Hz dvs  $\omega_{pu}(t)=1.0$ .  
 $p_{e,pu}(\delta) = p_{max} \sin(\delta) = 2.4 \sin(\delta)$  per enhet.

**Sökt:** a)  $\delta_0$ . b) Det kritiska  $\delta_1$ . c) Tiden för att få  $\delta_1$  genom att integrera svänningsekvationen. d) Hur många perioder tiden från c) motsvarar.

- a. Innan kortslutningen är  $p_{e,pu} = p_{m,pu}$  vilket också kan ses i figuren

$$p_{max} \sin(\delta_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_0 = \arcsin(1/p_{max}) = 0.4298 \text{ rad} = 24.6243^\circ$$

Svar:  $\delta_0=24.6^\circ$

- b. Om maskinen vänder precis innan stabilitetsgränsen blir  $\delta_2=\delta_3 = 180 - \delta_0 = 155.37^\circ = 2.7118 \text{ rad}$ .  
Sätter vi upp uttrycken för AA och AD fås

$$\begin{aligned} AA &= \int_{\delta_0}^{\delta_1} p_{m,pu} \delta = \delta_1 - \delta_0 \\ AD &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} (p_{max} \sin \delta - p_{m,pu}) d\delta = p_{max} [-\cos \delta]_{\delta_1}^{\delta_2} - [\delta]_{\delta_1}^{\delta_2} \\ &= -p_{max} \cos \delta_2 + p_{max} \cos \delta_1 - \delta_2 + \delta_1 \end{aligned}$$

Med equal-area kriteriet det vill säga att AA=AD kan  $\delta_1$  beräknas

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_0 &= -p_{max} \cos \delta_2 + p_{max} \cos \delta_1 - \delta_2 + \delta_1 \\ \cos \delta_1 &= \frac{-\delta_0 + p_{max} \cos \delta_2 + \delta_2}{p_{max}} \\ \delta_1 &= \arccos\left(\frac{-\delta_0 + p_{max} \cos \delta_2 + \delta_2}{p_{max}}\right) = 1.5290 \text{ rad} = 87.6048^\circ \end{aligned}$$

Svar:  $\delta_1 = 87.6^\circ$

- c. Svänningsekvationen från formelbladet

$$\frac{2H}{\omega_{e,s}} \frac{d\omega_e}{dt} = P_{m,pu} - P_{e,pu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2H}{\omega_{e,s}} \frac{d^2\delta_e}{dt^2} = P_{m,pu} - P_{e,pu}$$

(eftersom  $\omega = \frac{d\delta}{dt}$ ). När en kortslutningen sker blir  $P_{e,pu} = 0$  så att svänningsekvationen blir

$$\frac{2H}{\omega_{e,s}} \frac{d^2\delta_e}{dt^2} = P_{m,pu}$$

Med  $\omega_{e,s} = 2\pi f$  och en första integration fås

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{2\pi f}{2H} P_{m,pu} t$$

där begynnelsevillkoret  $\frac{d\delta(0)}{dt} = 0$  (eftersom effektvinkeln är konstant) uppfylls. En till integration där begynnelsevillkoret  $\delta(0) = \delta_0$  uppfylls ger slutliga uttrycket för  $\delta$

$$\delta(t) = \frac{2\pi f}{2H} P_{m,pu} \frac{t^2}{2} + \delta_0.$$

Från ekvationen ovan fås tiden som ger  $\delta_1$

$$t_{\delta_1} = \sqrt{\frac{(\delta_1 - \delta_0)2H}{\pi f P_{m,pu}}} = 0.2049 \text{ s}$$

- d. Tiden motsvarar  $N = ft_{\delta_1} = 10.2454$  perioder som generatoren kan vara borta.

### Uppgift 5.

**Givet:** Enlinjeschema med 4 bussar och impedanser i per enhet.

**Sökt:** Admittansmatrisen och information om vad som är känt om bussarna.

- a. Från ledningsimpedanserna fås ledningsadmittanserna ( $Y=1/Z$ )  $Y_{12} = Y_{21} = -1j$ ,  $Y_{13} = Y_{31} = -2j$ ,  $Y_{24} = Y_{42} = -2j$ ,  $Y_{34} = Y_{43} = -4j$  per enhet. Vi har fyra bussar och ansätter spänningarna  $U_1, U_2, U_3, U_4$  och strömmarna  $I_1, I_2, I_3, I_4$  där positiv strömriktning är från elementet vid bussen in till nätet (dvs en last får negativa värden på strömmen när vi hittat lösningen).

Strömmen in till buss 1 tecknas med Kirchoffs strömlag:

$$I_1 = (U_1 - U_2)Y_{12} + (U_1 - U_3)Y_{13}$$

Strömmen in till buss 2:

$$I_2 = (U_2 - U_1)Y_{21} + (U_2 - U_4)Y_{24}$$

Strömmen in till buss 3:

$$I_3 = (U_3 - U_1)Y_{31} + (U_3 - U_4)Y_{34}$$

Strömmen in till buss 3:

$$I_3 = (U_3 - U_1)Y_{31} + (U_3 - U_4)Y_{34}$$

Strömmen in till buss 4:

$$I_4 = (U_4 - U_2)Y_{42} + (U_4 - U_3)Y_{43}$$

Nu kan vi samla ihop alla admittanser framför spänningarna i högerleden:

$$\begin{array}{l} I_1 = (Y_{12} + Y_{13}) U_1 - Y_{12} U_2 - Y_{13} U_3 + 0 U_4 \\ I_2 = -Y_{21} U_1 + (Y_{21} + Y_{24}) U_2 + 0 U_3 - Y_{24} U_4 \\ I_3 = -Y_{31} U_1 + 0 U_2 + (Y_{31} + Y_{34}) U_3 - Y_{34} U_4 \\ I_4 = 0 U_1 - Y_{42} U_2 - Y_{43} U_3 + (Y_{42} + Y_{43}) U_4 \end{array}$$

Nu kan vi använda omvänd linjär algebra för att gå från summa till matrismultiplikation.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_{12} + Y_{13}) & -Y_{12} & -Y_{13} & 0 \\ -Y_{21} & (Y_{21} + Y_{24}) & 0 & -Y_{24} \\ -Y_{31} & 0 & (Y_{31} + Y_{34}) & -Y_{34} \\ 0 & -Y_{42} & -Y_{43} & (Y_{42} + Y_{43}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss admittansmatrisen

$$Y_{bus} = j \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

- b. Buss 1 är slack-buss  
Buss 2 är PQ-buss  
Buss 3 är PQ-buss  
Buss 4 är PV-buss

c. och d.

	V	$\theta$
Buss 1	Känd	Känd
Buss 2	Okänd	Okänd
Buss 3	Okänd	Okänd
Buss 4	Känd	Okänd

	P	Q
Buss 1	Okänd	Okänd
Buss 2	Känd	Känd
Buss 3	Känd	Känd
Buss 4	Känd	Okänd

- e. Skenbara effekterna för konsumenterna (PQ-bussarna) är totalt  $S_{tot} = \sqrt{(80 + 40)^2 + (60 + 30)^2} = 150$  MVA och eftersom båda generatorerna klarar 150 MVA så tror vi att enkelfelskriteriet uppfylls. Svar: Ja systemet uppfyller precis enkelfels kriteriet. (Detta var det tänkta svaret.) Men den som granskar nätet noggrant ser att PQ-bussarna kräver 150 MVA med  $\cos \phi = 0.8$  (induktiv karaktär) och eftersom ledningarna förbrukar reaktiv effekt kräver det totala systemet litet mer än 150 MVA. Därför kommer generatoren på buss 4 inte klara av det helt själv. Svar: Nej, systemet uppfyller inte enkelfelskriteriet, eftersom systemet förbrukar litet mer än de 150 MVA som generatoren på buss 4 klarar av att leverera. (Den som svarar detta får också rätt).

### Uppgift 6.

**Givet:** Bränslecellssystem med 350 seriekopplade celler, vardera med arean  $400 \text{ cm}^2$ .

**Sökt:** Ström, spänning och effekt.

Måste läsa av i diagrammet vilket kan ge litet olika värden.

- a. Maximal spänning från stacken  $U_{stack,max} = 350 \cdot 1.05 = 367.5 \text{ V}$ .
- b. Stacken når sin maximala effekt  $P_{cell,max} = 0.61 \text{ W/cm}^2$  vid ca  $1.35 \text{ A/cm}^2$  och cellens spänning är då  $0.45 \text{ V}$ . Stackens ström blir

$$I_{stack@P_{cell,max}} = 400 \cdot 1.35 = 540 \text{ A}$$

och spänning

$$U_{stack@P_{cell,max}} = 350 \cdot 0.45 = 157.5 \text{ V}.$$

Den maximala effekten blir

$$P_{stack,max} = 350 \cdot 400 \cdot P_{cell,max} = 85400 \text{ W}$$

eller

$$P_{stack,max} = 350 \cdot 400 \cdot I_{stack@P_{cell,max}} \cdot U_{stack@P_{cell,max}} = 85050 \text{ W}$$

beroende på vilka värden man väljer.

- c. Maximal uteffekt på systemnivå per cell är ca  $P_{sys,max} = 0.52 \text{ [W/cm}^2]$ . Detta ger den maximala uteffekten

$$P_{sys,max} = N \cdot A \cdot P_{sys,max} = 350 \cdot 400 \cdot 0.52 = 72800 \text{ W}$$