

Vehicle Dynamics and Control

Jan Åslund

jan.aslund@liu.se

Associate Professor

Dept. Electrical Engineering

Vehicular Systems

Linköping University

Sweden

Lecture 7

Kärt barn har många namn

AYC - Active Yaw Control

VDC - Vehicle Dynamics Control

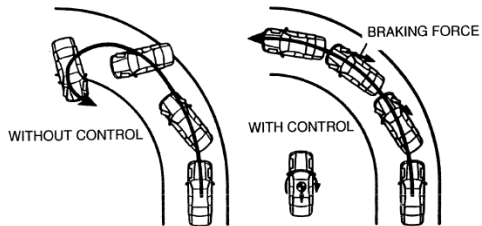
ESP - Electronic Stability Program

I fortsättningen används ESP som gemensam förkortning eftersom den är vanligast åtminstone för tillfället.

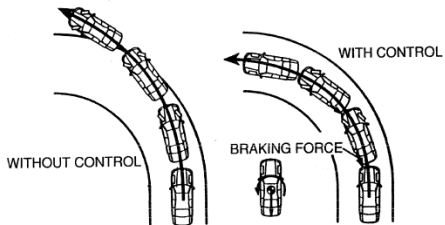
För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

Figur 5.24



(a)



Skapa ett sladdhämmande moment ΔM baserat på bilens uppförande jämfört med önskat beteende.

Vi börjar med att titta på kraven på kunskap om bilens aktuella uppförande.

Hur många variabler behövs?

ESP: Krav på kunskap om bilens uppförande

Hur beter sig en bil i stabil kurvtagning (relaterat till dynamiska variabler)?

En bil med konstant fart i en kurva med konstant krökning har konstant Ω_z , dvs konstant girvinkelhastighet (yaw-rate på engelska och ofta betecknad $\dot{\Psi}$).

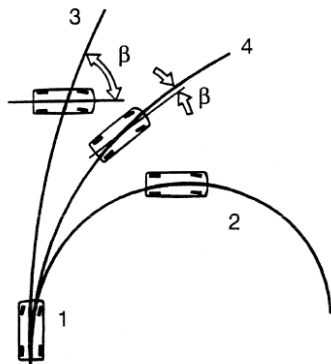
Ett första villkor på reglerfunktionen:

Reglera Ω_z

Detta är bakgrunden till den ursprungligen vanliga termen AYC - Active Yaw(-rate) Control

Det är viktigt att inse att det inte räcker med konstant Ω_z , dvs konstant yaw-rate.

Figur 5.23



- 1 STEP INPUT AT STEERING WHEEL
- 2 ON HIGH FRICTION ROAD
- 3 ON SLIPPERY ROAD WITH STEERING CORRECTION AND YAW RATE CONTROL
- 4 ON SLIPPERY ROAD WITH BOTH YAW RATE AND SIDE SLIP ANGLE CONTROL

ESP: Krav på kunskap om bilens uppförande

Villkoret på sidrörelse som kan formuleras i V_y men det normala är att införa fordonets sidavdrift β

Definiera fordonets sidavdrift (body slip på engelska)

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$

Vi får ett andra villkor på reglerfunktionen:

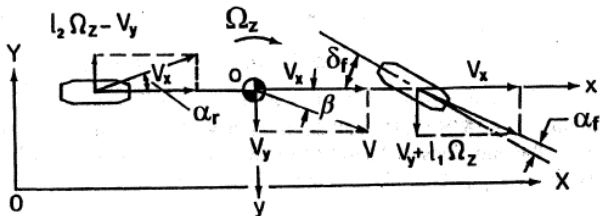
Reglera β

Detta är bakgrunden till att den ursprungligen vanliga termen AYC - Active Yaw(-rate) Control inte är lika populär längre.

ESP: Krav på kunskap om bilens uppförande

Slutsatsen att det krävs två variabler att reglera på.

Vi väljer Ω_z och β .



Regleruppgiften består alltså i att reglera Ω_z och β .

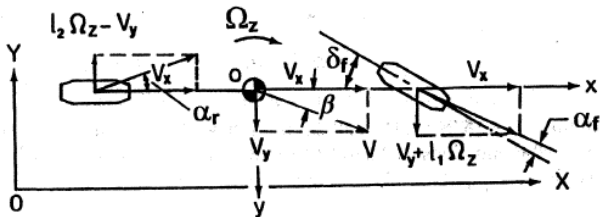
Vilka börvärden ska man använda?

Här kommer föraren in i bilden och vad vet vi om personen bakom ratten? Det vi vet är som vanligt förarens agerande på sina reglage: ratt, pedaler och växelspak. (De två senare är inte primära här men är viktiga för underliggande reglering som ABS/TC.)

Uppgift: relatera styrvinkel, δ , till börvärden på Ω_z och β .

Önskat beteende: Girvinkelhastigheten

Hur ska vi relatera styrvinkel, δ , till lämpliga börvärden på Ω_z och β som beskriver ett gott uppförande hos fordonet. Utgår från värdena vid stationär kurvtagning.

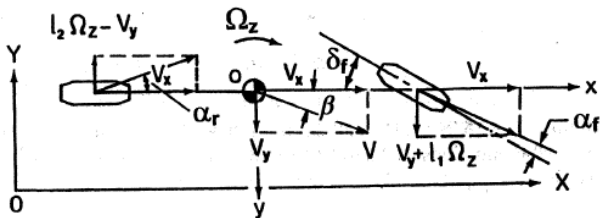


$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}, \quad \Omega_z = \frac{V}{R}$$

Eliminerar vi kurvradien R så får vi sambandet

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V}{L + K_{us} V^2/g} \delta_f$$

Önskat beteende: Sidavdrift



$$\delta_f = \frac{L}{R} + K_{us} \frac{V^2}{gR}, \quad \beta^{nom} = \frac{l_2}{R} - \alpha_r = \frac{l_2}{R} - \frac{l_1 m V_x^2}{2C_{\alpha_r} LR}$$

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f$$

Vi är nu redo att formulera reglermålen (i matematiska termer)

Reglera bilen så att den reagerar på rattutslag, δ , så att girvinkelhastighet, Ω_z , och sidavdrift, β , beter sig som under stabil stationär kurvtagning.

Välj som referensvärden

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha r} L}}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

Vi har nu kommit en bit på väg.

För att uppnå önskad funktion behöver man

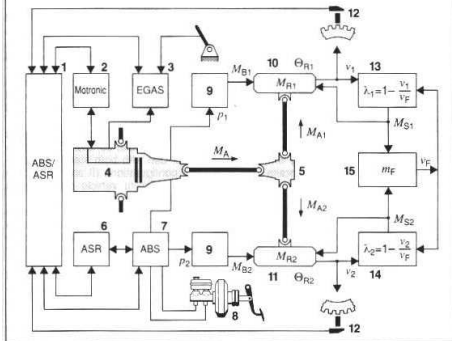
- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

Vi ska nu översiktligt titta på den tredje punkten.

ESP: Underliggande regelsystem

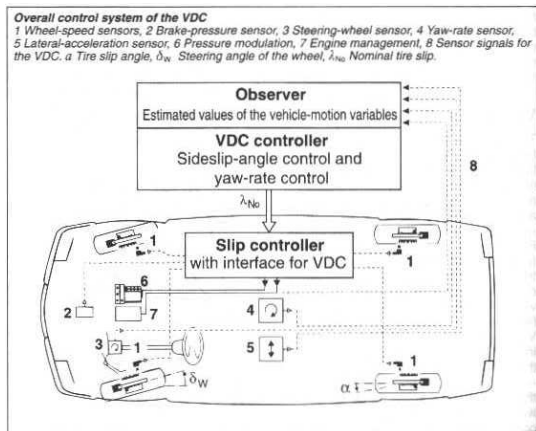
ABS/ASR control for passenger cars

1 ABS/ASR control unit, 2 Motronic control unit, 3 EGAS control unit, 4 Engine, clutch, transmission, 5 Differential, 6 ASR pressure source, 7 ABS Hydraulic modulator, 8 Brake master cylinder, 9 Wheel brakes, 10 Wheel 1, 11 Wheel 2, 12 Wheel-speed sensor, 13 Road surface, Wheel 1, 14 Road surface, Wheel 2, 15 Vehicle mass m_F , p Brake pressure, v Wheel speed, v_F Vehicle speed, λ Slip, θ_c Wheel inertia, M_A Drive force, M_B Braking force, M_R Total forces acting on drive wheel, M_S Surface forces. Indices 1, 2: Wheel 1, 2.



Kombinerad arkitektur för ABS och Traction Control (ASR på tyska).

ESP: Ett exempel



Ett exempel på
arkitektur.

Följande sensorsignaler finns tillgängliga.

δ Styrvinkel [rad].

$\dot{\psi}$ Girhastighet [rad/s].

$\omega_{1,2,3,4}$ Rotationshastigheter för respektive hjul [rad/s].

a_{lat} Lateral acceleration [m/s²].

Det finns också sensorer i det hydrauliska bromssystemet men vi går inte in i sådan detalj.

Uppgift: Bestäm aktuellt Ω_z , V_x och β .

Enklaste ansatsen (tillräcklig i laborationen) är att

Ω_z bestäms direkt ur sensorn för $\dot{\Psi}$, girhastigheten [rad/s].

V_x bestäms ur $\omega_{1,2,3,4}$ rotationshastigheterna för respektive hjul [rad/s]. Välj rätt hjul.

β bestäms genom att integrera a_{lat} laterala accelerationen [m/s²]. Då får man V_y och med användning av V_x ovan erhåller man via definitionsformeln β

Uppgift: Bestäm aktuellt Ω_z , V_x och β .

Enklaste ansatsen kan förbättras.

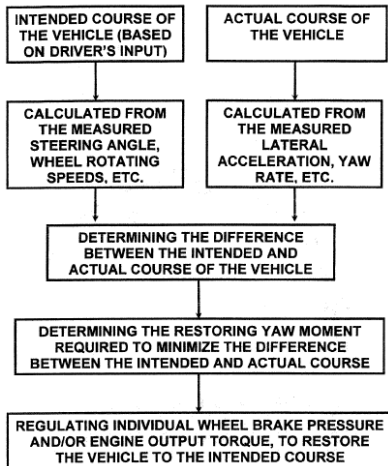
Inte ens V_x är enkel, dvs inte ens en "vanlig" hastighetsmätare är enkel.

Vi vet att dynamiken i ett förenklat fall ges av

$$\dot{\mathbf{u}} + M^{-1}A\mathbf{u} = M^{-1}B\delta$$

Det är naturligt att förbättra estimeringen av Ω_z , V_x och β genom att använda en **observatör**.

Figur 5.22



Inför ΔM , korrigerande moment kring bilens masscentrum som mellanstyrvariabel.

Antag att vi har nödvändiga variabler såsom $(\delta, v_x, v_y, \dot{\psi})$ från sensorer och observatörer.

Det gäller alltså att finna en styrlag

$$\Delta M = \Delta M(\delta, v_x, v_y, \dot{\psi})$$

Välj ΔM så att reglermålen uppnås.

Det är då naturligt att använda

$$\Delta M = \Delta M(\beta^{nom} - \beta, \Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$

Enklaste ansatsen är att proportionellt återkoppla de två storheter man vill hålla nere

$$\Delta M = k_1(\beta^{nom} - \beta) + k_2(\Omega_z^{nom} - \Omega_z)$$

där k_1, k_2 är regulatorparametrar som trimmas empiriskt.

Notera att $k_1 = 0$ ger ren “yaw-rate control” med möjlig problembild enligt figur 5.23 i Wong.

Fundera på vilka tecken k_1, k_2 ska ha.

Uppgiften är nu att givet ett önskat moment på bilen, ΔM , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

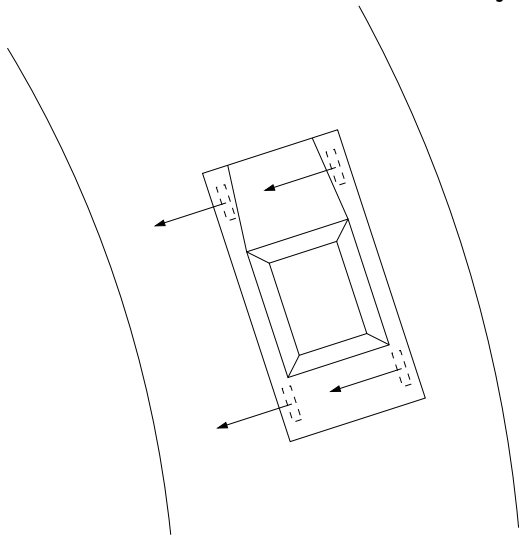
För att realisera detta kan komplicerade strategier användas, men vi begränsar oss nu till en enkel variant som är tillräcklig för laborationen i kursen.

Viktig strategifråga:

Vilket (vilka) hjul ska bromsas i olika situationer?

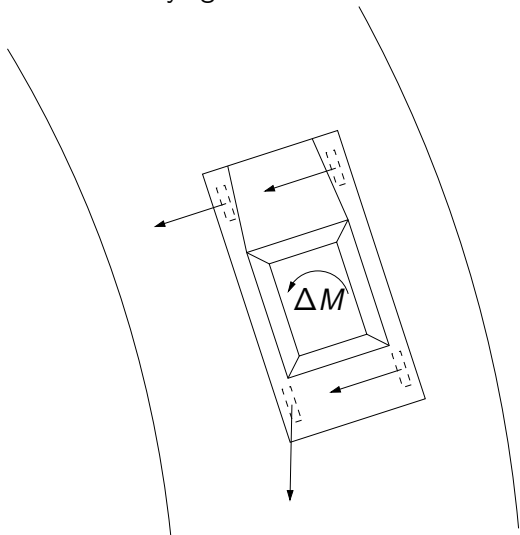
ESP: Val av hjul att bromsa

Schematisk skiss av situationen för diskussion av vilket hjul att bromsa.



ESP: Val av hjul att bromsa

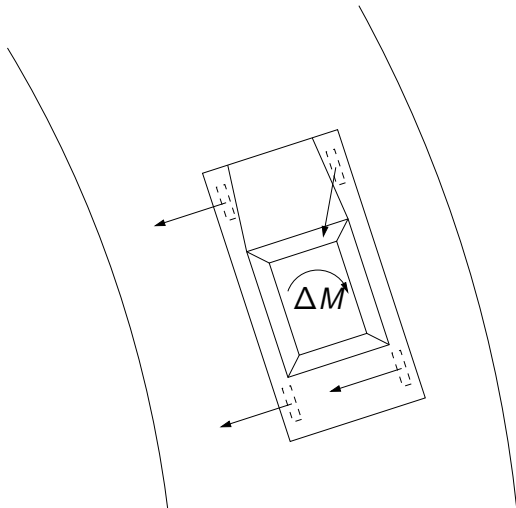
Med ΔM som i figur ska uppenbart ett vänsterhjul bromsas.
Fram eller bak? Sidkraftsanalys ger att det är bak som ska bromsas.



ESP: Val av hjul att bromsa

Med ΔM som i figur ska uppenbart ett högerhjul bromsas.

Med bromsat framhjul ger den minskade sidkraften ett moment i önskad riktning.



Uppgiften är alltså att givet ett önskat moment på bilen, ΔM , skapa detta moment genom att individuellt bromsa olika hjul.

Strategi:

Vid överstyrning, när ett upprätande moment krävs, bromsas ett framhjul.

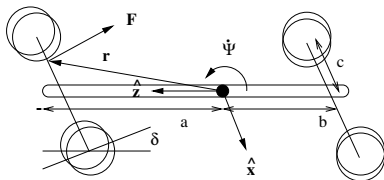
Vid understyrning, när ett vridande moment krävs, bromsas ett bakhjul.

Kvantitativt gäller det att finna den erforderliga bromskraften, F , som funktion av det önskade momentet ΔM och styrvinkel δ .

Löses fall för fall för de fyra fallen: höger- och vänstersväng, med respektive över- och understyrning.

ESP: Effektivering med bromsar, Fall 1

Ett fordon i vänstersväng, $\Omega_z < 0$.



Antag att fordonet överstyr vilket medför $\Delta M > 0$. Styrvinkeln, δ , är i figuren negativ.

Ett upprätande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa höger framhjul.

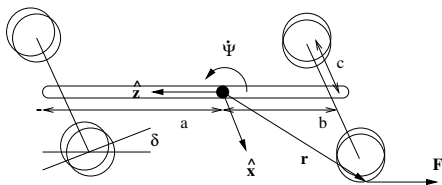
$$r = a\hat{x} + c\hat{y}$$

$$F = |F|(-\cos(-\delta)\hat{x} + \sin(-\delta)\hat{y}) = -|F|(\cos\delta\hat{x} + \sin\delta\hat{y})$$

$$M = r \times F = |F|(-a\sin\delta + c\cos\delta)\hat{z}$$

ESP: Effektivering med bromsar, Fall 2

Ett fordon i vänstersväng, $\Omega_z < 0$.



Antag att fordonet understyr vilket medför $\Delta M < 0$. Styrvinkeln, δ , är i figuren negativ.

Ett vridande moment krävs. Det realiseras genom att bromsa vänster bakhjul.

$$r = -b\hat{x} - c\hat{y}$$

$$F = -|F|\hat{x}$$

$$M = r \times F = -|F|c\hat{z}$$

De två återstående fallen gäller fordon i högersväng, $\Omega_z > 0$, och är analoga med vänstersväng.

Notera dock olika teckenbyten.

Antag att fordonet överstyr. Ett upprätande moment realiseras genom att bromsa vänster framhjul, och momentet som krävs är mindre än noll.

Antag att fordonet understyr. Ett vridande moment realiseras genom att bromsa höger bakhjul, och momentet som krävs är större än noll.

I samtliga fall löses den erforderliga bromskraften, F , ut ur sista ekvationen som funktion av det önskade momentet ΔM och styrvinkel δ .

Vid en verklig realisering tillkommer att hantera det underliggande bromssystemet så att man erhåller de bromskrafter man önskar men vi går inte in på detta.

Det visar sig att många förare överreagerar i utsatta situationer.

Vid sladd yttrar det sig i alltför häftiga rattutslag.

Problemställning: Finns det några vettiga åtgärder som kan införlivas i styrsystemet?

Häftiga rattutslag resulterar via

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

och

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2 C_{\alpha_r} L}}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta_f$$

i för stora nominella värden.

Hur kan man begränsa Ω_z^{nom} och β^{nom} ?

ESP: Tillägg för hantering av förarbeteende

Det är inte lönt att kräva större sidkrafter än underlaget medger i förhållande till farten.

Vi har

$$F_{y_{max}} = ma_{y_{max}} < \mu mg$$

Nu vet vi inte μ men kan skaffa oss en uppfattning via $a_{y_{trigg}} = \mu g$ när det börjar sladda.

Vi har också

$$a_y = \dot{V}_y + V_x \Omega_z$$

Ansätter vi lite grovt att $\dot{V}_y = 0$ precis i starten av sladden så får vi

$$\Omega_z^{nom} < \frac{\mu g}{V_x}$$

Inför denna begränsning i styrsystemet.

ESP: Tillägg för hantering av förarbeteende

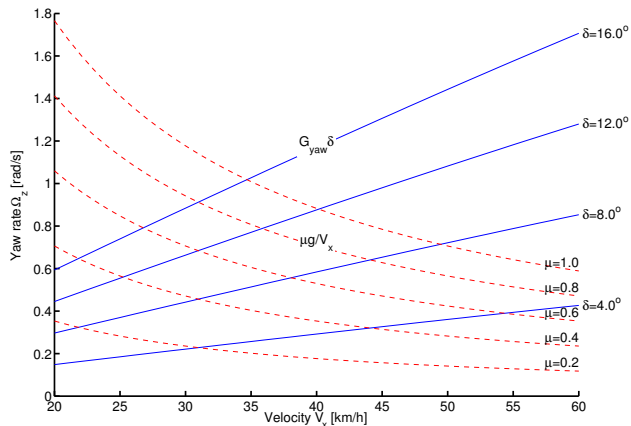


Illustration
begränsning
 Ω_z^{nom} .

av
av

Vi får

$$\Omega_z^{nom} = \frac{V_x}{L + K_{us} V_x^2 / g} \delta \quad \text{om} \quad \Omega_z^{nom} < \left| \frac{\mu g}{V_x} \right|$$
$$\Omega_z^{nom} = \left| \frac{\mu g}{V_x} \right| \text{sign}(\Omega_z^{nom}) \quad \text{annars}$$

Notera att detektering/diagnos krävs utöver filtrering (observatör) för att identifiera att sladd sker.

Ansatsen $\dot{V}_y = 0$ i starten av sladden är grov så om man säger att den termen tar maximalt 15 % av a_y så kan man använda

$$\Omega_z^{nom} < \left| 0.85 \frac{\mu g}{V_x} \right|$$

Begränsning av β_{nom} ?

Illustrerar med en empirisk gräns

$$\beta_{max}^{nom} = atan(0.02\mu g)$$

En bakgrund till att den fungerar är att β är liten när man har kontroll på fordonet. (I laborationen kan man använda $\beta^{nom} = 0$ med gott resultat.)

Man får alltså

$$\beta^{nom} = \frac{l_2 - \frac{l_1 m V_x^2}{2C_{\alpha r} L}}{L + K_{us} V^2 / g} \delta_f \quad \text{om } |\beta^{nom}| < \text{atan}(0.02\mu g)$$
$$\beta^{nom} = |\text{atan}(0.02\mu g)| \text{sign}(\beta^{nom}) \quad \text{annars}$$

där man skattar μg på som innan.

ESP: Tillägg för hantering av förarbeteende

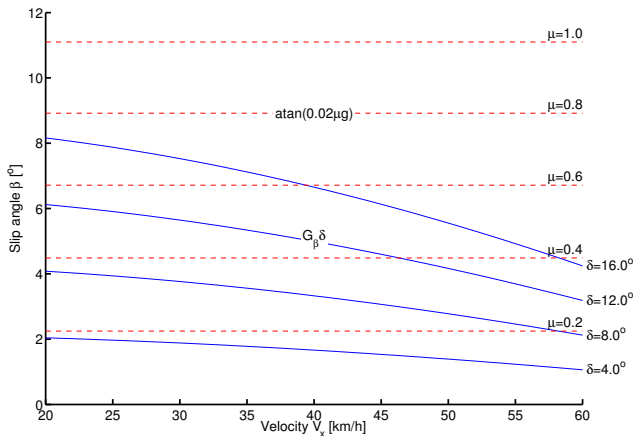


Illustration av begränsning av β^{nom} . För $\mu = 0.95$ (asfalt) får man 10 grader som övre gräns, och för $\mu = 0.35$ (packad snö) får man 4 grader som övre gräns.

Man kan gå vidare och införa filtrering/fördröjningar innan man låter rattutslag slå igenom i börvärdena.

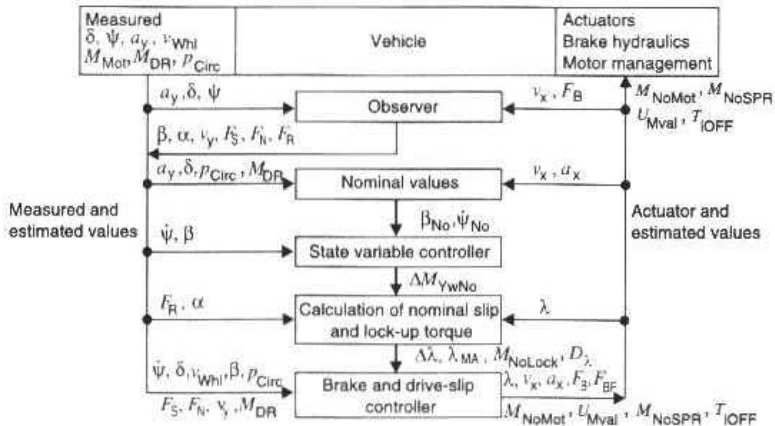
Man har också en dödzon på ΔM , dvs den måste vara större än en tröskel för att påverka bromsning av hjul. Det ska alltså inte hända något under normal körning. Detta sparar också bränsle eftersom något hjul i annat fall skulle småbromsa hela tiden.

Vi har nu kommit igenom hela kedjan.

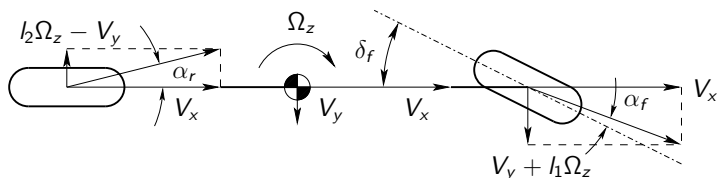
För att uppnå önskad funktion behöver man

- Beskriva bilens önskade beteende. Detta är inte trivialt eftersom det kräver en uppfattning om förarens önskan.
- Beskriva bilens aktuella beteende.
- Relatera till de sensorer och aktuatorer som finns, och till underliggande reglersystem.
- Ta hänsyn till förarens beteende i en pressad situation.
- Utforma ett styrsystem baserat på ovanstående.

ESP: Exempel på produkt



From the previous lecture:



Kinematics from the figure

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x}$$

Model for tire forces

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \alpha_f$$

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r} \alpha_r$$

From now it will be assumed that the longitudinal velocity V_x is constant and it will be play the role of a parameter in the analysis.

From the previous lecture:

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left(\delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left(\frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} \right)$$

Can be rearranged

$$m \dot{V}_y + \underbrace{\left[\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[\frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[\frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

The system

$$m\dot{V}_y + \underbrace{\left[\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_1} V_y + \underbrace{\left[mV_x + \frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_2} \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + \underbrace{\left[\frac{2l_1 C_{\alpha f} - 2l_2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_3} V_y + \underbrace{\left[\frac{2l_1^2 C_{\alpha f} + 2l_2^2 C_{\alpha r}}{V_x} \right]}_{a_4} \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t)$$

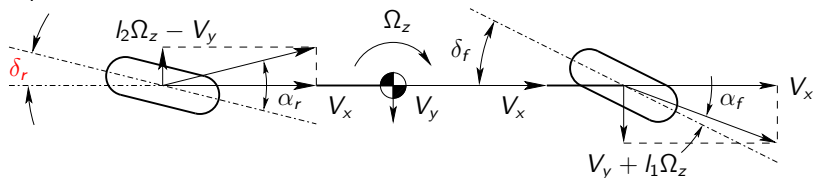
can be written in matrix form

$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \delta_f(t) \\ 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) \end{bmatrix}$$

Now we modify the model and add rear-wheel steering with the steer angle δ_r :



Kinematics from the figure

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{l_1\Omega_z + V_y}{V_x}$$

$$\alpha_r = \frac{l_2\Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r$$

Now we get

$$m(\dot{V}_y + V_x \Omega_z) = F_{yr} + F_{yf} \cos \delta_f + F_{xf} \sin \delta_f$$

$$I_z \dot{\Omega}_z = l_1 F_{yf} \cos \delta_f - l_2 F_{yr} + l_1 F_{xf} \sin \delta_f$$

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} \left(\delta_f - \frac{l_1 \Omega_z + V_y}{V_x} \right), \quad F_{yr} = 2C_{\alpha r} \left(\frac{l_2 \Omega_z - V_y}{V_x} + \delta_r \right)$$

Can be rearranged

$$m\dot{V}_y + a_1 V_y + a_2 \Omega_z = 2C_{\alpha f} \delta_f + 2C_{\alpha r} \delta_r$$

$$I_z \dot{\Omega}_z + a_3 V_y + a_4 \Omega_z = 2l_1 C_{\alpha f} \delta_f(t) - 2l_2 C_{\alpha r} \delta_r$$

The system

$$M\dot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{u}_f\delta_f(t) + \mathbf{u}_r\delta_r(t)$$

where

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$$

By taking the Laplace transform we get

$$(sM + A)X = \mathbf{u}_f\delta_f(s) + \mathbf{u}_r\delta_r(s)$$

It follows from

$$(sM + A)X = \mathbf{u}_f \delta_f(s) + \mathbf{u}_r \delta_r(s)$$

that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ms + a_1 & a_2 \\ a_3 & I_z s + a_4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_2 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r \right) \end{aligned}$$

where

$$\Delta = I_z m s^2 + (I_z a_1 + m a_4) s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)$$

is the determinant.

The transfer functions from δ_r to V_y and Ω_z

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 ms - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e., $\delta_r(s) = 1/s$. The immediate response in the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sG_{yr} + V_x G_{zr})\delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2C_{\alpha r} I_z s^2 + (\dots)s + (\dots)}{I_z m s^2 + (\dots)s + (\dots)} \frac{1}{s} = \frac{2C_{\alpha r}}{m} \end{aligned}$$

where we used the initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

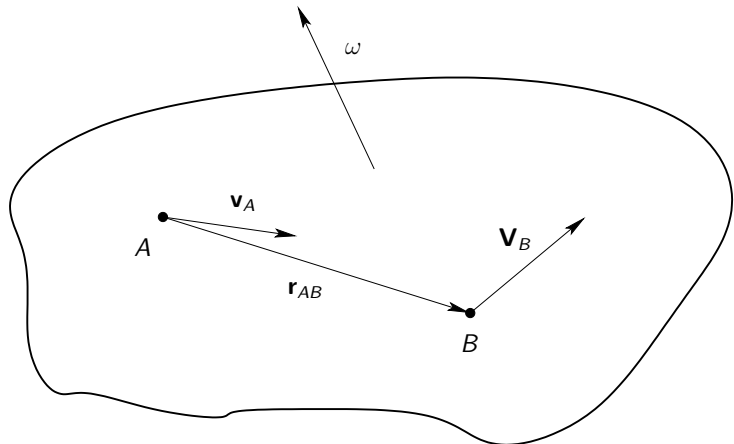
The transfer functions from δ_r to V_y and Ω_z

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y(s) \\ \Omega_z(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha r} \\ -2l_1 C_{\alpha r} \end{bmatrix} \delta_r(s) \\ &= \frac{2C_{\alpha r}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 + l_1 a_2 \\ -a_3 - l_1 ms - a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_r(s) = \begin{bmatrix} G_{yr}(s) \\ G_{zr}(s) \end{bmatrix} \delta_r(s) \end{aligned}$$

Consider a step in the rear steer angle, i.e., $\delta_r(s) = 1/s$. The limit value, as t tends to infinity, of the lateral acceleration at the center of gravity is then

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}_y + V_x \Omega_z &= \lim_{s \rightarrow 0} s(sV_y + V_x \Omega_z) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sG_{yr} + V_x G_{zr}) \delta_r \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(\dots)s^2 + (\dots)s - 2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{(\dots)s^2 + (\dots)s + (a_1 a_4 - a_2 a_3)} \frac{1}{s} = -\frac{2V_x C_{\alpha r} (a_1 l_1 + a_3)}{a_1 a_4 - a_2 a_3} \end{aligned}$$

where we used the final value theorem $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{AB})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 & -a_2 \\ -a_3 & ms + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2C_{\alpha f} \\ 2l_1 C_{\alpha f} \end{bmatrix} \delta_f \\ &= \frac{2C_{\alpha f}}{\Delta} \begin{bmatrix} I_z s + a_4 - l_1 a_2 \\ -a_3 + l_1 ms + a_1 l_1 \end{bmatrix} \delta_f \end{aligned}$$

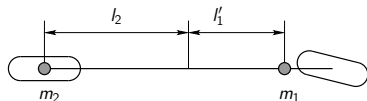
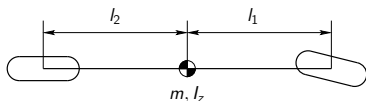
Consider a step in the front steer angle, i.e., $\delta_f(s) = 1/s$. The immediate response in the lateral acceleration at the rear axle is then

$$\begin{aligned} \dot{V}_y + V_x \Omega_z - l_2 \dot{\Omega}_z \Big|_{t=0^+} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sV_y - l_2 s \Omega_z + V_x \Omega_z) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)s^2 + (\dots)s + (\dots)}{I_z ms^2 + (\dots)s + (\dots)} = \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)}{I_z m} \end{aligned}$$

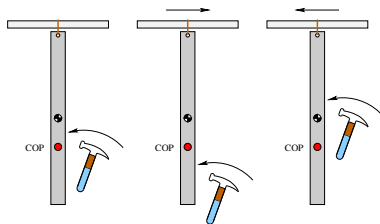
where we used the initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$.

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(l_z - ml_1 l_2)}{l_z m} = \frac{2C_{\alpha f} ml_2 (l'_1 - l_1)}{l_z m}$$

where we have introduced the length $l'_1 = l_z / (ml_2)$. The system is equivalent to a system with a point mass $m_1 = ml_2 / (l'_1 + l_2)$ located at the distance l'_1 in front of the center of gravity, and a point mass $m_2 = ml'_1 / (l'_1 + l_2)$ located at the rear axle.

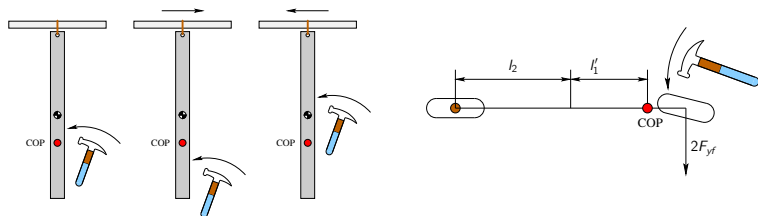


Consider a hanging beam being hit by a hammer:



Depending on where you hit it, the top of the beam will move in different directions. The limit case when the top doesn't move at all is when you hit it at the center of percussion (COP in the figure). For a uniform beam the distance to (COP) from the top is $2/3$ of the length of the beam.

If the suspension point is the rear axle, then the center of percussion is located at the mass m_1 in the figure:



This explains the sign of the initial acceleration at the rear axle:

$$\dot{V}_y - l_2 \dot{\Omega}_z + V_x \Omega_z \Big|_{t=0^+} = \frac{2C_{\alpha f}(I_z - ml_1 l_2)}{I_z m} = \frac{2C_{\alpha f} ml_2 (l'_1 - l_1)}{I_z m}$$