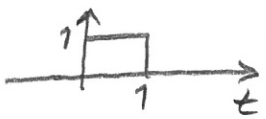
4.1-1 Beteckna de olika signalerna/funktionerna med $x(t)$

a) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ $\Rightarrow$ 


$$\underline{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{1} 1\cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{0^-}^{1} =$$

$$= \frac{e^{-s} - e^{0}}{-s} = \underline{\underline{\frac{1-e^{-s}}{s}}}$$

Konvergensområdet (där $|X(s)| < \infty$) är av typen $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$, eftersom $x(t) = 0$ för $t < 0$.

För $s = 0$ blir nämnaren noll, vilket verkar antyda att konvergensområdet är $\mathrm{Re}\{s\} > 0$. Doch är även täljaren noll för $s = 0$, så vi potensserieutvecklar lämpligen $e^{-s}$ för att se bättre hur $X(0)$ ser ut:

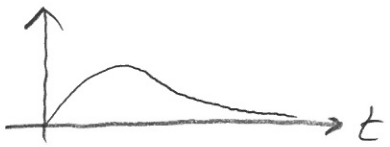
$$X(s) = \frac{1 - \left(1 + (-s) + \frac{(-s)^2}{2!} + \frac{(-s)^3}{3!} + \ldots\right)}{s} = 1 - \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} - \ldots$$

dvs. $X(0) = 1$

Konsekvensen blir att konvergensområdet är hela s-planet utom $s = -\infty$ (för $\lim_{s=\sigma\to-\infty} X(s) = \infty$), dvs. $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{s\} > -\infty}}$

(Anm: Om du svarar att $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\,dt < \infty$ för alla $\sigma > -\infty$ så räcker det också som motivering till konvergensområdet.
Vanligen upphommer inte så långa konvergensområdesresoneremang som ovan, vid laplacetransformberäkningar!)

b) $x(t) = t \cdot e^{-t} \cdot u(t)$




$$\underline{X(s)} = \int_0^\infty t e^{-t} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty t \cdot e^{-(s+1)t} dt = \left[ \frac{t \cdot e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} dt$$

$$= \left[ \frac{t \cdot e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} - \frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)^2} \right]_0^\infty =$$

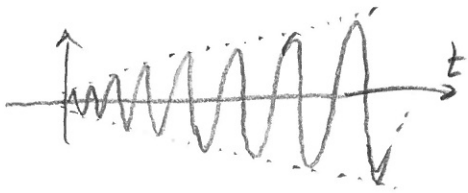
$= /$ $\lim_{t \to \infty} e^{-(s+1)t} = 0$ om $Re\{s+1\} > 0$, dvs. $Re\{s\} > -1$

$e^{-(s+1)t}$ går snabbare mot 0 än vad $t$ går mot $\infty$ då $t \to \infty$ $/$

$$= \frac{0 - 0 \cdot e^0}{-(s+1)} - \frac{0 - e^0}{(s+1)^2} = \underline{\frac{1}{(s+1)^2}}$$

Konv.omr: $\underline{Re\{s\} > -1}$

c) $x(t) = t \cdot \cos(\omega_0 t) u(t)$




$$\underline{X(s)} = \int_0^\infty t \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty \left( t \cdot e^{-(s - j\omega_0)t} dt + t \cdot e^{-(s + j\omega_0)t} \right) dt \right.$$

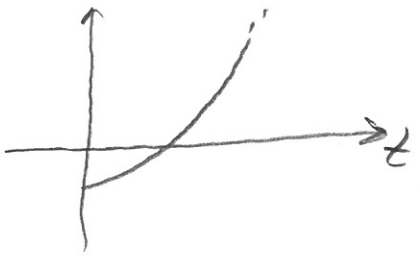
$= /$ • Partiell integration, som i b)

• $\lim_{t \to \infty} e^{-(s \pm j\omega_0)t} = 0$ om $Re\{s \pm j\omega_0\} = Re\{s\} > 0$ $/$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s - j\omega_0)^2} + \frac{1}{(s + j\omega_0)^2} \right) = \underline{\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}}$$

Konvergensområde: $\underline{Re\{s\} > 0}$

d) $x(t) = (e^{2t} - 2e^{-t})u(t)$




$$\underline{X(s)} = \int_0^\infty (e^{2t} - 2e^{-t})e^{-st}$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-(s-2)t} - 2e^{-(s+1)t}\right) dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(s-2)t}}{-(s-2)} - 2\,\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_0^\infty$$

$$= \Big/ \lim_{t\to\infty} e^{-(s-2)t} = 0 \text{ om } Re\{s-2\} > 0 \Rightarrow Re\{s\} > 2$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+1)t} = 0 \text{ om } Re\{s+1\} > 0 \Rightarrow Re\{s\} > -1 \Big/$$

$$= \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \underline{\underline{\frac{-s+5}{(s-2)(s+1)}}}$$

Konv.område $Re\{s\} > 2$ (vilket är uppfyllt för båda termerna)

4.1-2

a) $$\underline{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^1 t\cdot e^{-st}dt$$

$$= \left[\frac{t\cdot e^{-st}}{-s}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$= \left[\frac{t\cdot e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 = \frac{-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}-1}{s^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2}}}$$

Kausal begränsad signal med ändlig tidsutbredning $\Rightarrow$ Konv.omr. för $X(s)$ är $\underline{Re\{s\} > -\infty}$

($x(t) = 0$ för $t < 0$ och $|x(t)| < \infty$ $\forall t$ samt $x(t) = 0$ för $t < t_0$ och för $t > t_1$)

b) $\underline{\underline{X(s)}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot e^{-st} dt$

$= \left/ \sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right/ = \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} \left( e^{-(s-j)t} - e^{-(s+j)t} \right) dt$

$= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(s-j)t}}{-(s-j)} - \frac{e^{-(s+j)t}}{-(s+j)} \right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{-s\pi} \cdot e^{j\pi} - 1}{-(s-j)} - \frac{e^{-s\pi} \cdot e^{-j\pi} - 1}{-(s+j)} \right)$

$= \left/ e^{\pm j\pi} = -1 \right/ = \frac{(e^{-s\pi} + 1)}{2j} \cdot \frac{s+j - (s-j)}{(s-j)(s+j)} = \underline{\underline{\frac{e^{-s\pi} + 1}{s^2 + 1}}}$

Konv.område $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{s\} > -\infty}}$

(motivering, se a)

c) $\underline{\underline{X(s)}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^1 \frac{1}{e} t \cdot e^{-st} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt$

$= \left/ \text{Den första integralen beräknades i uppg. a} \right/$

$= \frac{-1}{e s^2} (s e^{-s} + e^{-s} - 1) + \left[ \frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)} \right]_1^{\infty}$

$= \left/ \mathrm{Re}\{s\} > -\infty \text{ resp. } \mathrm{Re}\{s+1\} > 0, \text{ dvs. } \mathrm{Re}\{s\} > -1 \right/$

$= \frac{-1}{e s^2} (s e^{-s} + e^{-s} - 1) + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}$

Konv.område: $\underline{\underline{\mathrm{Re}\{s\} > -1}}$ (gäller för båda termerna)

4.1-3 Enkelsidiga transformer, enligt uppgift
$\Rightarrow$ transformernes konvergensomr. är alla av typen $\mathrm{Re}\{s\} > T_0$ $\Rightarrow$ Använd transformparen i formelsamlingens Tab. 5 för att erhålla inverstransformerna.

a) $X(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+5s+6} = \dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)} =$

$= /\text{Part. bråksuppdeln.}/ = \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{s+3}$

(Enkelsidig transf. $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{s\} > -2$ & $\mathrm{Re}\{s\} > -3$)

Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $\underline{x(t) = (e^{-2t} + e^{-3t})u(t)}$

b) $X(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+4s+13} = \dfrac{3(s+2) - \frac{1}{3}\cdot 3}{(s+2)^2 + 3^2}$

$= 3 \cdot \dfrac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{(s+2)^2+3^2}$

(Konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} > -2$ för båda termerna)

Tab. 5:20 resp. 5:21 $\Rightarrow$

$\underline{x(t) = \left(3e^{-2t}\cos(3t) - \frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)\right)u(t)}$

c) $X(s) = \dfrac{(s+1)^2}{s^2-s-6} = /$ Täljarens gradtal är $\geq$ nämnarens gradtal ($\Rightarrow$ improper fraction enl. boken) $\Rightarrow$ omforma! Egentligen utför vi polynomdivision $/$

$= \dfrac{s^2-s-6+3s+7}{s^2-s-6} = 1 + \dfrac{3s+7}{(s+2)(s-3)}$

$= /\text{part. bråksuppdela!}/$

$= 1 - 0{,}2\dfrac{1}{s+2} + 3.2\dfrac{1}{s-3}$ (Konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} > 3$)

Tab. 5:1 & 5:11

$\underline{x(t) = \delta(t) - (0{,}2e^{-2t} - 3.2e^{3t})u(t)}$

d) $X(s) = \frac{5}{s^2(s+2)} = -\frac{5}{4}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$

$\text{Re}\{s\}>0$ ↑ ↗ $\text{Re}\{s\}>-2$ ↑

Tab. 5:3, 5:4 & 5:11 ⇒

$x(t) = \frac{5}{4}\left(-1 + 2t + e^{-2t}\right)u(t)$

e) $X(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)} =$ / Part. breksuppdela! /

$= \frac{-1}{s+1} + \frac{s+3}{s^2+2s+2}$

$= \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+1^2}$

$\Rightarrow X(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + 2\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$

(⇒ Konv.omr. för alla termerna är $\text{Re}\{s\}>-1$)

Tab. 5:11, 5:20 resp. 5:21 ⇒

$x(t) = e^{-t}\left(-1+\cos(t)+2\sin(t)\right)u(t)$

f) $X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} =$ / Part. breksuppdela /

$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = 2\cdot\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$

Tab. 5:3, 5:11 resp. 5:12

$x(t) = 2u(t) - 2e^{-t}u(t) - t\cdot e^{-t}u(t)$

$= \left(2-(2+t)e^{-t}\right)u(t)$

4.2-1 Tab 4:5 (iformels.) $x(t-t_0)u(t-t_0) \Leftrightarrow X_I(s)e^{-st_0}$, $t_0 \geq 0$

a) $x_a(t) = u(t) - u(t-1)$

Tab. 5:3 $\Rightarrow$ $u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$\Rightarrow u(t-1) \Leftrightarrow \frac{1}{s}e^{-s}$

$\Rightarrow X_a(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$, $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$

Motivering: Se lösning till 4.1-1a)

b) $x_b(t) = e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)$

$e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ (Tab. 5:11)

$\Rightarrow X_b(s) = \frac{1}{s+1}e^{-s\tau}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$

c) $x_c(t) = e^{-(t-\tau)} \cdot u(t) = e^{\tau} \cdot e^{-t} \cdot u(t)$

$\Rightarrow X_c(s) = e^{\tau} \cdot \frac{1}{s+1}$ $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ (Tab. 5:11)

d) $x_d(t) = e^{-t} \cdot u(t-\tau) = e^{-\tau} \cdot \underbrace{e^{-(t-\tau)} \cdot u(t-\tau)}$

$= e^{-t}u(t)$ förskjuten $\tau$ sek åt höger

$\Rightarrow X_d(s) = e^{-\tau} \cdot \frac{1}{s+1}e^{-s\tau}$

(Tab. 5:11 & 4:5) $= \frac{1}{s+1}e^{-(s+1)\tau}$ $\mathrm{Re}\{s\} > -1$

f) $x_f(t) = \sin(\omega_0(t-\tau))u(t-\tau) = x(t-\tau)$

där $x(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ (Tab. 5:19)

$\Rightarrow X_f(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \cdot e^{-s\tau}$ $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

4.2-2 Formels. Tab. 4:5 : $x(t-t_0)u(t-t_0) \Leftrightarrow X(s)\cdot e^{-st_0}$ ; $t_0 \geq 0$

a) $x_a(t) = t(u(t)-u(t-1)) = t\cdot u(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$

Tab. 5:4 & 4:5 $\Rightarrow$ $\underline{X_a(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\cdot e^{-s} - \frac{1}{s}e^{-s}}$

Konvergensområde? Se längst ned på sidan!

b) $x_b(t) = \sin(t)\big(u(t)-u(t-\pi)\big)$

$= \sin(t)\cdot u(t) + \underbrace{\sin(t-\pi)}_{=-\sin(t)} u(t-\pi)$

Tab. 5:19 & 4:5 $\Rightarrow$ $\underline{X_b(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-s\pi} = \frac{1}{s^2+1}\left(1+e^{-s\pi}\right)}$,

Konvergensområde? Se längst ned på sidan!

c) $x_c(t) = t(u(t)-u(t-1) + e^{-t}\cdot u(t-1)$

$= \frac{1}{e}x_a(t) + e^{-1}e^{-(t-1)}\cdot u(t-1)$

Tab. 5:11 & 4:5 $\Rightarrow$ $\underline{X_c(s) = \frac{1}{e}X_a(s) + e^{-1}\frac{1}{s+1}e^{-s}}$

$= \underline{\frac{1}{es^2}\left(1-e^{-s}-se^{-s}\right) + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}}$ ; $\underline{\mathrm{Re}\{s\} > -1}$

(Jfr. med 4.1-2c), samma uppgift)

---

Konvergensområde för $X_a(s)$ & $X_b(s)$ ovan:

Enligt Tab 5:4 & 5:19, så verkar $X_a(s)$ resp. $X_b(s)$ ha konv.område $\mathrm{Re}\{s\} > 0$, beroende på att nämnaren $s^2$ resp. $s^2+1$ hos de två transformerna blir noll för $s=0$ resp. $s=\pm j$ (som har $\mathrm{Re}\{s\}=0$). Dock, om $e^{-s}$ resp. $e^{-s\pi}$; transformerna taylorutvecklas ($e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$) så kan man visa att $s=0$ resp. $s=\pm j$ även transformernas täljare är noll för dessa resp. s-värden och $|X_a(0)| < \infty$ resp. $|X_b(\pm j)| < \infty$, d.v.s. $\mathrm{Re}\{s\} > 0$ är inte korrekt konv.område för $X_a(s)$ och $X_b(s)$. Här gäller istället, som för alla kausala begränsade signaler med ändlig tidsutbredning (t.ex. $x_a(t)$ & $x_b(t)$) att Laplacetransformens konvergensområde är $\underline{\mathrm{Re}\{s\} > -\infty}$.

Se/jfr. lösningen till 4.1-1a) samt 4.1-2a) [$=X_a(s)$] resp. 4.1-2b) [$=X_b(s)$]

4.2-3 Här utgår vi från att det är enkelsidiga transformer, dvs. varje transform har konv.område av typen $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$

a) $X_a(s) = \dfrac{(2s+5)e^{-2s}}{s^2+5s+6} = \hat{X}_a(s)\cdot e^{-2s}$ (★)

där $\hat{X}_a(s) = \dfrac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \underset{(\mathrm{Re}\{s\}>-2)}{\dfrac{1}{s+2}} + \underset{(\mathrm{Re}\{s\}>-3)}{\dfrac{1}{s+3}}$ $\mathrm{Re}\{s\} > -2$

Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $\hat{x}_a(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

(★) $\Rightarrow$ $x_a(t) = \hat{x}_a(t-2) = \underline{\left(e^{-2(t-2)} + e^{-3(t-2)}\right)u(t-2)}$

b) $X_b(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}\cdot e^{-3s} + \dfrac{2}{s^2+2s+2} = X_1(s)e^{-3s} + X_2(s)$ (●)

där $X_1(s) = \dfrac{s+1-1}{(s+1)^2+1^2} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \underset{\mathrm{Re}\{s\}>-1}{\dfrac{1}{(s+1)^2+1^2}}$

Tab. 5:20 & 5:21 $\Rightarrow$ $x_1(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) - e^{-t}\sin(t)u(t)$

$X_2(s) = 2\cdot\underset{\mathrm{Re}\{s\}>-1}{\dfrac{1}{(s+1)^2+1^2}} \Rightarrow x_2(t) = 2e^{-t}\sin(t)u(t)$

(●) $\Rightarrow$ $\underline{x_b(t)} = x_1(t-3) + x_2(t)$

$= e^{-(t-3)}\left(\cos(t-3) - \sin(t-3)\right)u(t-3) + 2e^{-t}\sin(t)u(t)$

4.3-1 Deriveringsoperatorn: $D^n y(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$

a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$\mathcal{L}\{\text{vänsterledet}\} = \mathcal{L}\{\text{högerledet}\}$

och Tab. 4:10 (formels.) $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n X(s) - s^{n-1}x(0-) + s^{n-2}\frac{dx(0-)}{dt} + \dots$

$$\Rightarrow s^2Y(s) - \underbrace{s\cdot y(0-) - \frac{dy(0-)}{dt}}_{=0} + 3\Big(sY(s) - \underbrace{y(0-)}_{=0}\Big) + 2Y(s) = s\cdot X(s) - \underbrace{x(0-)}_{=0}$$

$x(t) = u(t)$ $\overset{\text{Tab 5:3}}{\Rightarrow} X(s) = \frac{1}{s}$ ; $\text{Re}\{s\} > 0$

$$\Rightarrow (s^2 + 3s + 2)Y(s) = s\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad \text{Re}\{s\} > -1$$

Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)}}$

b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ $\overset{\text{Tab. 4:10}}{\Rightarrow}$

$$s^2Y(s) - \underbrace{s\cdot y(0-)}_{=2} - \underbrace{\frac{dy(0-)}{dt}}_{=1} + 4\Big(s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0-)}_{=2}\Big) + 4Y(s) = sX(s) - \underbrace{x(0-)}_{=0} + X(s)$$

$x(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}$ ; $\text{Re}\{s\} > -1$ $\Rightarrow$

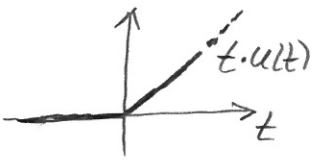
$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 4(sY(s) - 2) + 4Y(s) = s\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}$$

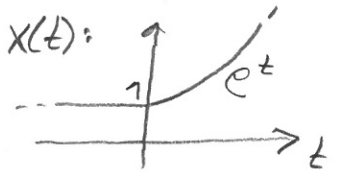
$$\Rightarrow (s^2 + 4s + 4)Y(s) = 2s + 10$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s+10}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+2} + \frac{6}{(s+2)^2} \qquad \text{Re}\{s\} > -2$$

Tab 5:11 & 5:12 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(t) = (2+6t)e^{-2t}u(t)}}$

4.11-1 a) $x(t) = e^{t\cdot u(t)}$




$$t\cdot u(t) = \begin{cases} 0; & t<0 \\ t; & t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{t\cdot u(t)} = \begin{cases} e^0 = 1; & t<0 \\ e^t; & t\geq 0 \end{cases}$$

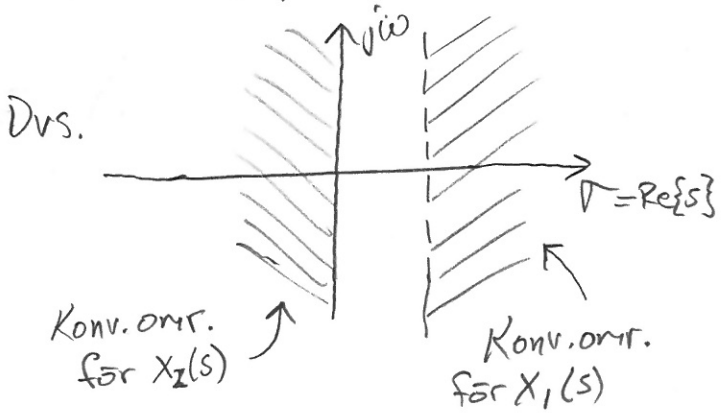
$$\Rightarrow x(t) = X_2(t) + X_1(t), \text{ där } \begin{cases} X_2(t) = u_0(-t) \\ X_1(t) = e^t\cdot u(t) \end{cases}$$

Tab. 4:4 $\Rightarrow X_2(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}\Big|_{s\to -s} = \frac{1}{-s}$ (Ges även direkt av Tab 5:7)

med konv.område $\mathrm{Re}\{s\} < 0$

$X_1(s) = \frac{1}{s-1}$ har konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} > 1$ (Tab. 5:11)

Dvs.



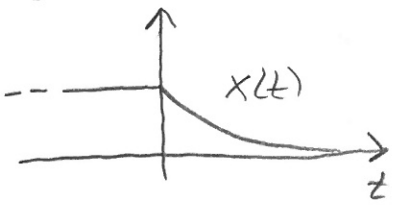

Dvs. $X_2(s) + X_1(s)$ har inte något sammanhängande konvergensområde

$\Rightarrow X_2(s) + X_1(s) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)}$

utgör inte en Laplacetransform till $x(t)$.

($\Rightarrow x(t)$ har ingen Laplacetransform!)

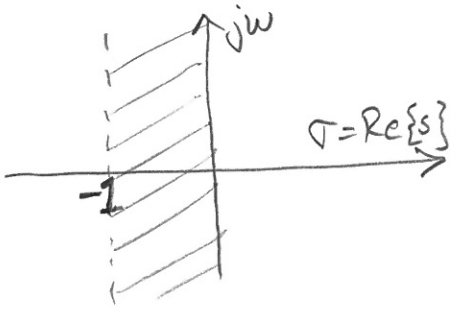
b) $x(t) = e^{-t\cdot u(t)} = \begin{cases} 1; & t<0 \\ e^{-t}; & t\geq 0 \end{cases}$




$= X_2(t) + X_3(t)$, där $X_2(t) = u_0(-t)$, som i a), där

$X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\} = \frac{-1}{s}$ med konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} < 0$

$X_3(s) = \mathcal{L}\{x_3(t)\} = \frac{1}{s+1}$ med konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} > -1$



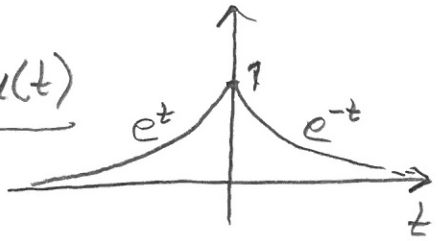

$\Rightarrow$ Konvergensområdet för $X(s) = X_2(s) + X_3(s) =$

$= \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{-1}{s(s+1)}$ är

$-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 0$

4.11-2

a) $x_a(t) = e^{-|t|} = \underbrace{e^{t}\cdot u_0(-t)}_{x_2(t)} + \underbrace{e^{-t}\cdot u(t)}_{x_1(t)}$




Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$ ; $\underline{Re\{s\} > -1}$

$x_2(t) = x_1(-t)$ $\overset{\text{Tab. 4:4}}{\Rightarrow}$ $X_2(s) = X_1(-s) = \frac{1}{-s+1} = \frac{-1}{s-1}$

för $Re\{-s\} > -1$, dvs $\underline{Re\{s\} < 1}$

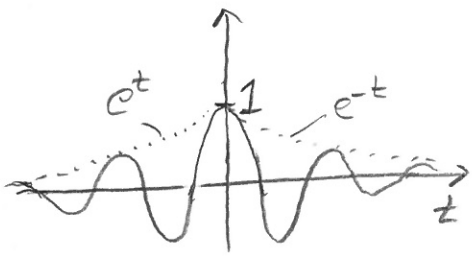
$\Rightarrow \underline{X_a(s)} = X_2(s) + X_1(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = \underline{\frac{-2}{(s-1)(s+1)}}$

med konv.område $\underline{-1 < Re\{s\} < 1}$

b) $x_b(t) = e^{-|t|}\cdot\cos(t) = \underbrace{e^{t}\cos(t)\cdot u_0(-t)}_{x_2(t)} + \underbrace{e^{-t}\cos(t)\,u(t)}_{x_1(t)}$

Tab. 5:20 $\Rightarrow$

$X_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2}$ ; $Re\{s\} > -1$




$x_2(t) = x_1(-t)$ $\overset{\text{Tab. 4:4}}{\Rightarrow}$

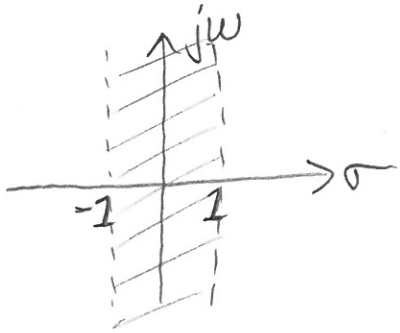
$X_2(s) = X_1(-s) = \frac{-s+1}{(-s+1)^2 + 1^2}$

$= -\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1^2}$ ; $Re\{-s\} > -1$, dvs. $Re\{s\} < 1$

(erhålls även direkt från Tab. 5:27)

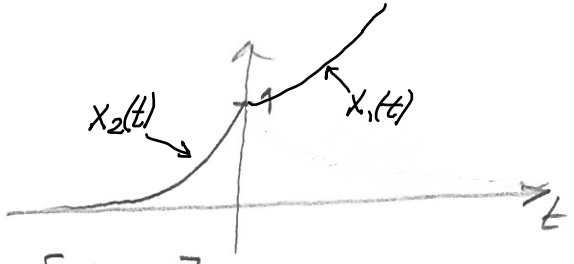
$\underline{X_b(s)} = X_2(s) + X_1(s) = \underline{\frac{4 - 2s^2}{s^4 - 4}}$ ; $\underline{-1 < Re\{s\} < 1}$

a) & b):



c) $x_c(t) = e^{t}u(t) + e^{2t}u_0(-t)$

$= x_1(t) + x_2(t)$




$X_1(s) = \frac{1}{s-1}$ ; $Re\{s\} > 1$ [Tab 5:11]

$x_2(t) = x_3(-t)$, där $x_3(t) = e^{-2t}u(t)$

$\Rightarrow X_3(s) = \frac{1}{s+2}$ ; $Re\{s\} > -2$ [Tab. 5:11]

$\Rightarrow X_2(s) = X_3(-s) = \frac{1}{-s+2} = \frac{-1}{s-2}$ ; $Re\{s\} > -2$

$\Rightarrow Re\{s\} < 2$

$\underline{X_c(s)} = X_1(s) + X_2(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}$

[$X_2(s)$ erhålls även direkt från Tab. 5:14]

$= \frac{-1}{(s+1)(s-2)}$, $1 < Re\{s\} < 2$

4.11-3

a) $X_a(s) = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{=X_1(s)} + \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{=X_2(s)}$ $-3 < \sigma < -2$ ($\sigma = Re\{s\}$)

Dvs:

$X_2(s) = \frac{1}{s+3}$ ; $Re\{s\} = \sigma > -3$ $\overset{\text{Tab.5:11}}{\Rightarrow}$ $\underline{x_2(t) = e^{-3t}u(t)}$

$X_1(s) = \frac{1}{s+2}$ ; $Re\{s\} = \sigma < -2$

Låt $X_3(s) = X_1(-s) = \frac{1}{-s+2} = -\frac{1}{s-2}$ ; $Re\{-s\} < -2$

dvs $Re\{s\} > 2$

Tab. 5:11 $\Rightarrow$

$x_3(t) = -e^{2t}u(t)$ $\Rightarrow$

$\underline{x_1(t)} = x_3(-t) = \underline{-e^{-2t}u_0(-t)}$

[$x_1(t)$ erhålls även direkt från $X_1(s)$ m.hjp. Tab 5:14]

Alltså: $X_a(s) = X_1(s) + X_2(s)$ $\Rightarrow$

$\underline{x_a(t)} = x_1(t) + x_2(t) = \underline{-e^{-2t}u_0(-t) + e^{-3t}u(t)}$

b) $X_b(s) = \frac{2s-5}{(s-2)(s-3)} = \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{=X_1(s)} + \underbrace{\frac{1}{s-3}}_{=X_2(s)}$ ; $2 < \sigma < 3$ ($\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$)

$\mathrm{Re}\{s\} > 2$ $\quad$ $\mathrm{Re}\{s\} < 3$

$\Rightarrow \underline{x_1(t) = e^{2t}u(t)}$ [Från Tab 5:11]

[$x_2(t)$ kan även erhållas direkt från $X_2(s)$ m.h.a. Tab. 5:14]

$X_3(s) = X_2(-s) = -\frac{1}{s+3}$ ; $\mathrm{Re}\{s\} > -3$

Tab 5:11 $\Rightarrow x_3(t) = -e^{-3t}u(t) \Rightarrow \underline{x_2(t) = x_3(-t) = -e^{3t}u_0(-t)}$

$\therefore \underline{x_b(t) = x_1(t) + x_2(t) = e^{2t}u(t) - e^{3t}u_0(-t)}$

c) $X_c(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-2}$ ; $\sigma > -1$

Tab. 5:11 $\Rightarrow \underline{x_c(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)}$

d) $X_d(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathrm{Re}\{s\}<-1} + \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\mathrm{Re}\{s\}<-2}$ ; $\sigma < -2$

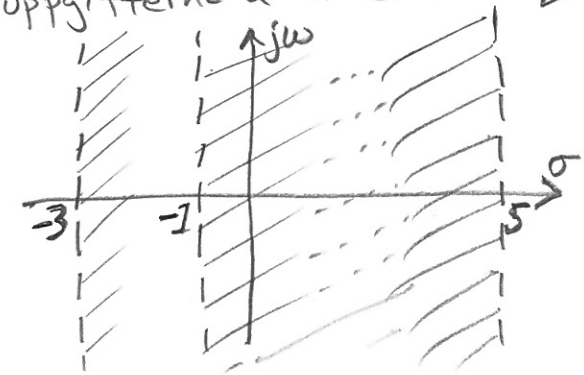
Båda termerna motsvarar, och hanteras som, $X_1(s) \Leftrightarrow x_1(t)$ i deluppgift a) [Eller direkt från Tab. 5:14]

$\underline{x_d(t) = -(e^{-t} + e^{-2t})u_0(-t)}$

e) $X_e(s) = \frac{3s^2-2s-17}{(s+1)(s+3)(s-5)} = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\sigma>-1} + \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{\sigma>-3} + \underbrace{\frac{1}{s-5}}_{\sigma<5}$ ; $\underline{-1 < \sigma < 5}$ ($\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$)

På motsvarande sätt som i deluppgifterna a-d erhålls:

$\underline{x_e(t) = (e^{-t} + e^{3t})u(t) - e^{5t}u_0(-t)}$



# Svar på ytterligare några uppgifter i kap. 4

4.2-6

a) (i) $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t-2)$

(Tab 4:10) ⇕ (Tab. 5:1 & 4:5)

$sX(s) = 1 - 1\cdot e^{-2s} \Rightarrow \underline{X(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) \quad Re\{s\} > -\infty}$

(ii) $\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-2) - \delta(t-4)$

(Tab. 4:10) ⇕ (Tab. 5:1 & 4:5)

$sX(s) = 1\cdot e^{-2s} - 1\cdot e^{-4s} \Rightarrow \underline{X(s) = \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-4s}) \quad Re\{s\} > -\infty}$

(iii) $\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - 3u(t-2) + 2u(t-3)$

⇕

$s\cdot X(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-3s} \quad (x(0-) = 0)$

$\Rightarrow \underline{X(s) = \frac{1}{s^2}(1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s}) \quad Re\{s\} > -\infty}$

---

4.11-2

d) $X_d(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} = \frac{-1}{s(s+1)} \quad ; \quad -1 < Re\{s\} < 0$

e) $X_e(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \frac{-1}{s(s-1)} \quad ; \quad 0 < Re\{s\} < 1$

f) $X_f(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} + \frac{-1}{s-1} = \frac{-(s+\omega_0^2)}{(s+\omega_0^2)(s-1)} \quad ; \quad 0 < Re\{s\} < 1$

4.11-4

$$X(s) = \frac{2s^2 - 2s - 6}{(s+1)(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s+2}$$

a) $x_a(t) = (e^{-t} - e^{t} + 2e^{-2t})\,u(t)$

b) $x_b(t) = (-e^{t} + e^{-t} - 2e^{2t})\,u(-t)$

c) $x_c(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})\,u(t) + e^{t}u(-t)$

d) $x_d(t) = 2e^{-2t}u(t) + (-e^{-t} + e^{t})\,u(-t)$