5 Fouriertransformen för tidsdiskreta funktioner

5.1 Fouriertransformen

5.1.1 Vi använder här definitionen av fouriertransformen:

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

a)

$$x_a[n] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow X_a[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega \cdot 0} = 1$$

b)

$$x_b[n] = \delta[n-k]$$

$$\Rightarrow X_b[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]e^{-j\Omega n} = \Big/ \begin{matrix}\text{Enhetsimpulsen} \\ \text{finns vid } n=k\end{matrix} \Big/ = e^{-j\Omega k}$$

c)

$$x_c[n] = \gamma^n u[n-1]$$

$$\Rightarrow X_c[\Omega] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma e^{-j\Omega}\right)^n = \Big/ \begin{matrix}|\gamma e^{-j\Omega}| = |\gamma| < 1 \\ \text{enligt uppgift}\end{matrix} \Big/$$
$$= \left(\gamma e^{-j\Omega}\right)^1 \cdot \frac{1}{1-\gamma e^{-j\Omega}} = \frac{\gamma}{e^{j\Omega}-\gamma}$$

d)

$$x_d[n] = \gamma^n u[n+1]$$

$$\Rightarrow X_d[\Omega] = \sum_{n=-1}^{\infty} \gamma^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\gamma e^{-j\omega}\right)^n = /|\gamma| < 1/ = \left(\gamma e^{-j\Omega}\right)^{-1} \frac{1}{1-\gamma e^{-j\Omega}}$$
$$= \frac{e^{j2\Omega}}{\gamma\left(e^{j\Omega}-\gamma\right)}$$

5.1.2 Den inversa fouriertransformen defnieras som

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}d\Omega$$

a)

$$X_1[\Omega] = e^{jk\Omega};\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
x_1[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jk\Omega}e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k+n)\Omega}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(k+n)\Omega}}{j(k+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{(k+n)\pi}\cdot\frac{e^{j(k+n)\pi}-e^{-j(k+n)\pi}}{2j} = \frac{\sin\left((k+n)\pi\right)}{(k+n)\pi} = \Bigg/ \begin{matrix} = \operatorname{sinc}\left((k+n)\pi\right) \\ = \operatorname{sinc}_N(k+n) \end{matrix} \Bigg/ \\
&= \begin{Bmatrix} 0;\ k+n \neq 0 \\ 1;\ k+n = 0 \end{Bmatrix} = \delta[n+k]
\end{aligned}$$

b)

$$X_2[\Omega] = \cos(k\Omega) = \frac{1}{2}e^{jk\Omega} + \frac{1}{2}e^{-jk\Omega};\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Uppgift a)}\ \Rightarrow x_2[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n+k] + \delta[n-k]\right)$$

c)

$$X_3[\Omega] = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(\Omega)\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=X_a[\Omega]} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(\Omega)}_{=X_b[\Omega]}$$

$$X_a[\Omega] = \frac{1}{2}e^{j0\Omega} \Rightarrow /k = 0 \text{ i a)}/ \Rightarrow x_a[n] = \frac{1}{2}\delta[n]$$

$$X_b[\Omega] = \frac{1}{2}\cos(\Omega) \Rightarrow /k = 1 \text{ i b)}/ \Rightarrow x_b[n] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right)$$

$$\Rightarrow x_3[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right)$$

d)

$$X_4[\Omega] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0);\ |\Omega| \leq \pi$$

$$x_4[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega = /\text{Dirac vid } \Omega = \Omega_0/ = e^{j\Omega_0 n}$$

e)

$$X_5[\Omega] = \pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0) + \delta(\Omega+\Omega_0)\right);\ |\Omega| \leq \pi$$

$$\begin{aligned}
x_5[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\delta(\Omega+\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n} \\
&= \cos(\Omega_0 n)
\end{aligned}$$

5.1.3 **a)**

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \Big/ \begin{matrix} x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] \\ + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{matrix} \Big/$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(\delta[n+2]e^{-j\Omega n} + 2\delta[n+1]e^{-j\Omega n}$$

$$+ 3\delta[n]e^{-j\Omega n} + 2\delta[n-1]e^{-j\Omega n} + \delta[n-2]e^{-j\Omega n}\big)$$

$$= e^{j2\Omega} + 2e^{j\Omega} + 3e^{0} + 2e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} = 3 + 4\cdot\frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2} + 2\cdot\frac{e^{j2\Omega}+e^{-j2\Omega}}{2}$$

$$= 3 + 4\cos(\Omega) + 2\cos(2\Omega)$$

b)

$$X[\Omega] = \sum_{n=1}^{5} x[n]e^{-j\Omega n} = /\text{som i a)}/ = e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + 3e^{-j3\Omega} + 2e^{-j4\Omega} + e^{-j5\Omega}$$

$$= e^{-j3\Omega}\left(3 + 2\left(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}\right) + \left(e^{j2\Omega}+e^{-j2\Omega}\right)\right)$$

$$= e^{-j3\Omega}\left(3 + 4\cos(\Omega) + 2\cos(2\Omega)\right)$$

Anm: Låt $x_a[n] = x[n]$ i uppgift a) och $x_b[n] = x[n]$ i uppgift b)

$$\Rightarrow x_b[n] = x_a[n-3]$$

$$\Rightarrow X_b[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b[n]e^{-j\Omega n} = \Big/ \begin{matrix} x_b[n] = x_a[n-3] \\ \text{Låt } m = n-3 \end{matrix} \Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a[m]e^{-j\Omega(m+3)}$$

$$= e^{-j3\Omega}\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a[m]e^{-j\Omega m} = e^{-j3\Omega}\cdot X_a[\Omega]$$

Sambandet $X_b[\Omega] = e^{-j3\Omega}\cdot X_a[\Omega]$ erhålls även utgående från egenskapen $x[n-n_0] \Longleftrightarrow X[\Omega]e^{-j\Omega n_0}$ i formelsamlingens Tabell 7:6.

5.1.4 **a)**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} 1\cdot \underbrace{e^{-j\Omega n_0}\cdot e^{j\Omega n}}_{=e^{j\Omega(n-n_0)}} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\Omega(n-n_0)}}{j(n-n_0)}\right]_{-\Omega_0}^{\Omega_0}$$

$$= \frac{\sin\left(\Omega_0(n-n_0)\right)}{\pi(n-n_0)} = \frac{\Omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\Omega_0(n-n_0)\right) = \frac{\Omega_0}{\pi}\mathrm{sinc_N}\left(\frac{\Omega_0}{\pi}(n-n_0)\right)$$

b)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\Omega_0}^{0} 1\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\Omega n}d\Omega + \int_{0}^{\Omega_0} 1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\Omega n}d\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{j\cdot e^{j\Omega n}}{jn}\right]_{-\Omega_0}^{0} + \left[\frac{-j\cdot e^{j\Omega n}}{jn}\right]_{0}^{\Omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi n}\left(e^{0} - e^{-j\Omega_0 n} - \left(e^{j\Omega_0 n} - e^{0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(1 - \frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}\right) = \frac{1-\cos(\Omega_0 n)}{\pi n}$$

Kommentar, a) och b): Här ser vi tydligt hur de två signalerna skiljer sig åt, p.g.a. att deras respektive fasspektrum är olika – trots att de har samma amplitudspektrum.

5.1.5 **a)** $X_a[\Omega] = \Omega + \pi$: **Nej**, är ingen fouriertransform, ty $X_a[\Omega]$ är inte 2π-periodisk.

b) $X_b[\Omega] = j + \pi$: **Ja**, $X_b[\Omega]$ är konstant och kan därför vara en fouriertransform.

c) $X_c[\Omega] = \sin(10\Omega)$: Har period $\frac{2\pi}{10}$, dvs. $X_c[\Omega] = X_c[\Omega + 2\pi] \Rightarrow X_[\Omega]$ kan vara en fouriertransform.

d) $X_d[\Omega] = \sin\left(\frac{\Omega}{10}\right)$: Har period $\frac{2\pi}{1/10} = 10\pi$, dvs. den är *inte* 2π-periodisk $\Rightarrow X_d[\Omega]$ kan *inte* vara en fouriertransform.

e) $X_e[\Omega] = \delta(\Omega)$: Är *inte* 2π-periodisk $\Rightarrow$ Den kan *inte* vara en fouriertransform.

5.2 Egenskaper hos fouriertransformen

5.2.1 Vi kommer att använda följande samband:

$$\gamma^n u[n] \Longleftrightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - \gamma};\ |\gamma| < 1 \qquad \text{(Tab. 8:5)}$$

$$x[n - n_0] \Longleftrightarrow X[\Omega] e^{-j\Omega n_0};\ n_0 \in \mathbb{Z} \qquad \text{(Tab. 7:6)}$$

a)

$$x_1[n] = a^{n-m} u[n-m] = x[n-m]$$

där

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$\Rightarrow X[\Omega] = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a}$$

$$\Rightarrow X_1[\Omega] = X[\Omega] e^{-jm\Omega} = \frac{e^{j\Omega(1-m)}}{e^{j\Omega} - a}$$

b)

$$x_2[n] = a^{n-3}\left(u[n] - u[n-10]\right) = a^{-3} \cdot a^n u[n] - a^7 \cdot a^{n-10} u[n-10]$$

$$\Rightarrow X_2[\Omega] = a^{-3} \cdot \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} - a^7 \cdot \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} \cdot e^{-j10\Omega} = \frac{a^{-3} e^{j\Omega}\left(1 - a^{10} e^{-j10\Omega}\right)}{e^{j\Omega} - a}$$

c)

$$x_3[n] = a^{n-m} u[n] = a^{-m} \cdot a^n u[n]$$

$$\Rightarrow X_3[\Omega] = \frac{a^{-m} \cdot e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a}$$

d)

$$x_4[n] = a^n \cdot u[n-m] = a^m \cdot a^{n-m} \cdot u[n-m]$$

$$\Rightarrow X_4[\Omega] = a^m \cdot \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} \cdot e^{-j\Omega m} = \frac{a^m e^{j\Omega(1-m)}}{e^{j\Omega} - a}$$

5.2.2

$$x[n] = a^n \cos(\Omega_0 n) u[n] = \frac{1}{2}\left(ae^{j\Omega_0}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(ae^{-j\Omega_0}\right)^n u[n]$$

$$\text{Tabell 8:5 } \Rightarrow X[\Omega] = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - ae^{j\Omega_0}} + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - ae^{-j\Omega_0}}\right)$$

$$= \frac{e^{j\Omega}}{2}\left(\frac{e^{-j\Omega_0}}{e^{j(\Omega-\Omega_0)} - a} + \frac{e^{j\Omega_0}}{e^{j(\Omega+\Omega_0)} - a}\right)$$

$$= \frac{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega} - ae^{-j\Omega_0} + e^{j\Omega} - ae^{j\Omega_0}\right)}{2\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)} - a\right)\left(e^{j(\Omega+\Omega_0)} - a\right)}$$

$$= \frac{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega} - a \cdot \cos(\Omega_0)\right)}{e^{j2\Omega} - 2ae^{j\Omega}\cos(\Omega_0) + a^2}$$

Jämför med hur fouriertransformen här även kan erhållas från z-transformen längs enhetscirkeln:

$$X[\Omega] = X[z]\Big|_{z=e^{j\Omega}} \overset{\text{Tab. 10:21}}{=} \left.\frac{z\left(z - a \cdot \cos(\Omega_0)\right)}{z^2 - 2a\cos(\Omega_0)z + a^2}\right|_{z=e^{j\Omega}}$$