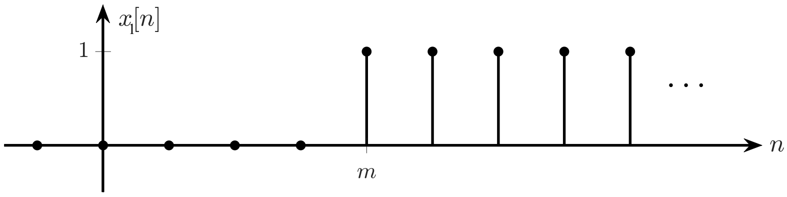
4 z-transformen

4.1 z-transformen

4.1.1 **a)** $x_1[n] = u[n-m]$



$$X_1[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=m}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = /k = n-m/ = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+m)} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^k$$
$$= /\left|z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1/ = z^{-m} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z^m(z-1)} \quad \text{med konv.område } |z| > 1.$$

b)

$$\sin(n\pi) = 0 \; \forall n \;\Rightarrow\; x_2[n] = \gamma^n \cdot \sin(n\pi)u[n] = 0$$
$$\Rightarrow\; X_2[z] = 0$$

c)

$$x_3[n] = \gamma^n \cos(n\pi)u[n] = \gamma^n(-1)^n u[n] = (-\gamma)^n \cdot u[n]$$

$$\Rightarrow\; X_3[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\gamma z^{-1}\right)^n$$
$$= /\left|-\gamma z^{-1}\right| < 1 \;\Rightarrow\; |z| > |\gamma|/ = \frac{1}{1-(-\gamma z^{-1})}$$
$$= \frac{z}{z+\gamma}, \quad \text{med konvergensområde } |z| > |\gamma|.$$

d)

$$x_4[n] = \gamma^{n-1}u[n-1]$$

$$\Rightarrow\; X_4[z] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n-1} \cdot z^{-n} = \gamma^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma z^{-1}\right)^n = /\left|\gamma z^{-1}\right| < 1 \;\Rightarrow\; |z| > |\gamma|/$$
$$= \gamma^{-1}\left(\gamma z^{-1}\right)^1 \cdot \frac{1}{1-\gamma z^{-1}} = \frac{1}{z-\gamma}, \quad \text{med konvergensområde } |z| > |\gamma|$$

4.1.2 **a)**

$$x_a[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1]$$
$$\text{Tab. 10:1 \& 10:2} \;\Rightarrow\; X_a[z] = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}; \; |z| > 0 \quad (\text{ty } z \text{ i nämnaren})$$

(*Anm: Konvergensområdestypen* $|z| > R_0$ *är också i överensstämmelse med att* $x_a[n<0]$).

b)

$$x_b[n] = \gamma^{n-2}u[n-2] = \gamma^{-2}\left(\gamma^n u[n] - \gamma^0\delta[n] - \gamma^1\delta[n-1]\right)$$

$$\text{Tab. 10:4, 10:1 resp. 10:2} \quad \Rightarrow \quad X_b[z] = \gamma^{-2}\Bigg(\underbrace{\frac{z}{z-\gamma}}_{|z|>|\gamma|} -1 - \gamma \underbrace{z^{-1}}_{|z|>0}\Bigg) = \frac{1}{(z-\gamma)z};\ |z| > |\gamma|$$

c)

$$x_c[n] = 2^{n+1}u[n-1] + e^{n-1}u[n] = 4 \cdot 2^{n-1}u[n-1] + e^{-1} \cdot e^n u[n]$$

$$\text{Tab. 10:5 \& 10:4} \quad \Rightarrow \ X_c[z] = 4 \cdot \underbrace{\frac{1}{z-2}}_{|z|>2} + e^{-1} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-e}}_{|z|>e} = \frac{4(z-e) + e^{-1}z(z-2)}{(z-2)(z-e)};\ |z| > e$$

4.1.3 Alla z-transformerna är här *enkelsidiga*, enligt uppgift, vilket innebär att deras konvergensområden är av typen $|z| > R_0$, där R_0 är avståndet till transformens (yttersta) singulära punkt i z-planet.

I lösningarna nedan partialbråksuppdelas $\dfrac{X[x]}{z}$ i stället för $X[z]$ – det brukar vara enklare och kan då oftast ske med hjälp av "handpåläggning".

a)

$$X_1[z] = \frac{z(z-4)}{z^2-5z+6} \quad \Rightarrow \quad \Big/ z^2 - 5z + 6 = \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (z-2)(z-3) \Big/ \quad \Rightarrow$$

$$\frac{X_1[z]}{z} = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3}$$

$$\Rightarrow \ X_1[z] = 2 \cdot \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|>2} - \underbrace{\frac{z}{z-3}}_{|z|>3}$$

Från Tabell 10:4 erhålls $x_1[n] = (2 \cdot 2^n - 3^n)\, u[n] = \left(2^{n+1} - 3^n\right) u[n]$

b)

$$\frac{X_2[z]}{z} = \frac{z-4}{z(z-2)(z-3)} = \frac{-2/3}{z} + \frac{1}{z-2} + \frac{-1/3}{z-3}$$

$$\Rightarrow X_2[z] = \frac{-2}{3} + \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|>2} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{z}{z-3}}_{|z|>3}$$

Tabell 10:1 & 10:4 ger $x_2[n] = -\dfrac{2}{3}\delta[n] + \Bigg(2^n - \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3^n}_{3^{n-1}}\Bigg) u[n]$

c)

$$\frac{X_3[z]}{z} = \frac{e^{-2} - 2}{(z - e^{-2})(z-2)} = \frac{1}{z - e^{-2}} - \frac{1}{z-2}$$

$$\Rightarrow X_3[z] = \underbrace{\frac{z}{z - e^{-2}}}_{|z|>e^{-2}} - \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|>2}$$

Tabell 10:4 $\Rightarrow x_3[n] = \left(e^{-2n} - 2^n\right) u[n]$

d)

$$X_4[z] = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^3} = z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}$$

$$\text{Tabell 10:2} \;\Rightarrow x_4[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

e)

$$\frac{X_5[z]}{z} = \frac{-5z + 22}{(z+1)(z-2)^2} = \frac{3}{z+1} + \frac{-3}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow X_5[z] = 3 \cdot \underbrace{\frac{z}{z+1}}_{|z|>1} - 3 \cdot \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|>2} + 2 \cdot \underbrace{\frac{2z}{(z-2)^2}}_{|z|>2}$$

$$\text{Tabell 10:4 \& 10:6} \;\Rightarrow x_5[n] = (3 \cdot (-1)^n - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot n2^n)u[n] = (3(-1)^n - (3 - 2n)2^n)u[n]$$

4.2 Egenskaper hos z-transformen

4.2.1

- Vid direkt beräkning utgående från z-transformens definition:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{m-1} 1 \cdot \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1 - \left(z^{-1}\right)^m}{1 - z^{-1}} = \frac{z^m - 1}{z^{m-1}(z-1)}$$

Här har vi en (ändlig) geometrisk summa som konvergerar om kvoten z^{-1} är ändlig, dvs. $|z^{-1}| < \infty$, dvs. $|z| > 0$, vilket också är z-transformens konvergensområde.

- Vid beräkning med hjälp av Tabell 10 och 9 i formelsamlingen, där vi från figuren ser att $x[n] = u[n] - u[n-m]$:

$$\text{Från Tabell 10:3 erhålls transformparet } u[n] \Longleftrightarrow \frac{z}{z-1}; \quad |z| > 1$$

Detta, tillsammans med högerskiftegenskapen i Tabell 9:5, dvs. $x[n-m]u[n-m] \Longleftrightarrow z^{-m} \cdot X[z]$

$$\text{ger den sökta transformen } X[z] = \frac{z}{z-1} - z^{-m} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^m - 1}{z^{m-1}(z-1)}$$

Eftersom täljaren kan faktoriseras som $z^m - 1 = (z-1)\left(z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + 1\right)$, så får vi $X[z] = \frac{(z-1)\left(z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + 1\right)}{z^{m-1}(z-1)} = \frac{z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + 1}{z^{m-1}}$, dvs. transformen har konvergensområdet $|z| > 0$ (och inte $|z| > 1$, som det ser ut som om faktorn $z - 1$ står oförkortad i nämnaren ovan.

4.2.2 **a)**

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{II}}\left\{(-1)^n x[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-z)^{-n} = X[-z]$$

b)

$$\text{Tabell 10:4} \;\Rightarrow \gamma^n u[n] \Longleftrightarrow \frac{z}{z-\gamma}; \quad |z| > |\gamma|$$

$$\Rightarrow (-\gamma)^n u[n] = (-1)^n \gamma^n u[n] \xLeftrightarrow{\text{Tab. 10:4 \& uppg. a)}} \frac{-z}{-z-\gamma} = \frac{z}{z+\gamma}; \quad |z| > |\gamma|$$

c) **i)**

$$
\begin{aligned}
2^{n-1}u[n] &= \frac{1}{2}\cdot 2^n u[n] \overset{\text{Tab. 10:4}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-2};\ |z|>2 \\
(-2)^{n-1}u[n] &= \frac{-1}{2}(-1)^n 2^n u[n] \overset{\text{(b)}}{\Longleftrightarrow} \frac{-1}{2}\cdot\frac{-z}{-z-2} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{z}{z+2};\ |z|>2 \\
\Rightarrow \left(2^{n-1}-(-2)^{n-1}\right)u[n] &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-2}+\frac{z}{z+2}\right) = \frac{z^2}{z^2-4};\ |z|>2
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\gamma^n\cdot\cos(\pi n)u[n] = (-1)^n\gamma^n u[n] \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} \frac{z}{z+\gamma};\ |z|>|\gamma|
$$

4.3 Den dubbelsidiga z-transformen

4.3.1 **a)**

$$
x_a[n] = \underbrace{0{,}8^n u[n]}_{:=x_1[n]} + \underbrace{2^n u_0[-n]}_{:=x_2[n]}
$$

Här använder vi återigen Tab. 10:4 för att erhålla transformen $X_1[z] = \dfrac{z}{z-0{,}8};\ |z|>0{,}8$

$$
\begin{aligned}
X_2[z] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n\cdot z^{-n} = /n=-k-1/ = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-1}\cdot z\right)^{k+1} \\
&= \frac{z}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \Big/\left|\frac{z}{2}\right|<1\Big/ = \frac{z}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} = \frac{-z}{z-2};\quad |z|<2
\end{aligned}
$$

(Den transformen kan även erhållas direkt från Tab. 10:13, men här bör du öva dig på att beräkna z-transformerna enligt grunddefinitionen.)

Vi erhåller således den sökta transformen som

$$
X_a[z] = X_1[z]+X_2[z] = \underbrace{\frac{z}{z-0{,}8}}_{|z|>0{,}8} - \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|<2} = \frac{-1{,}2z}{(z-0{,}8)(z-2)};\quad 0{,}8<|z|<2
$$

b)

$$
x_b[n] = \underbrace{2^n u[n]}_{:=x_1[n]} - \underbrace{3^n u_0[-n]}_{:=x_2[n]}
$$

På motsvarande sätt som i uppgift a), så erhåller vi

$$
\left.\begin{aligned}
X_1[z] &= \frac{z}{z-2};\quad |z|>2 \\
X_2[z] &= \frac{-z}{z-3};\quad |z|<3
\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow
$$

$$
X_b[z] = \frac{z}{z-2} - \frac{-z}{z-3} = \frac{z(2z-5)}{(z-2)(z-3)};\quad 2<|z|<3
$$

($X_1[z]$ & $X_2[z]$ kan även erhållas från Tab. 10:4 respektive Tab. 10:13)

c)

$$x_c[n] = \underbrace{0{,}8^n u[n]}_{=x_1[n]} + \underbrace{3 \cdot 0{,}4^n u_0[-n]}_{=x_2[n]}$$

På motsvarande sätt som i uppgift a), så erhålls

$$\left.\begin{aligned} X_1[z] &= \frac{z}{z-0{,}8}; & |z| > 0{,}8 \\ X_2[z] &= 3 \cdot \frac{-z}{z-0{,}4}; & |z| < 0{,}4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Konvergensområderna för de två deltransformerna *överlappar inte*, (snittet mellan dem är tomma mängden) dvs. $X_1[z] + X_2[z]$ har inget sammanhängande konvergensområde, vilket innebär att $X_c[z]$ *inte existerar* (dvs. $x_c[n]$ har ingen z-transform).

d)

$$x_d[n] = 0{,}5^{|n|} = \underbrace{0{,}5^n \cdot u[n]}_{:=x_1[n]} + \underbrace{0{,}5^{-n} \cdot u_0[-n]}_{:=x_2[n]}$$

På motsvarande sätt som i uppgift a) (eller direkt från Tab. 10:4 respektive 10:13), så erhålls

$$\left.\begin{aligned} X_1[z] &= \frac{z}{z-0{,}5}; & |z| > 0{,}5 \\ X_2[z] &= \frac{-z}{z-0{,}5^{-1}} = \frac{-z}{z-2}; & |z| < 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[z] = X_1[z] + X_2[z] = \frac{z}{z-0{,}5} + \frac{-z}{z-2} = \frac{-1{,}5z}{(z-0{,}5)(z-2)}; \quad 0{,}5 < |z| < 2$$

4.3.2

$$\frac{X[z]}{z} = \frac{e^{-2}-2}{(z-e^{-2})(z-2)} = \frac{1}{z-e^{-2}} + \frac{-1}{z-2}$$

$$\Rightarrow X[z] = \underbrace{\frac{z}{z-e^{-2}}}_{:=X_1[z]} - \underbrace{\frac{z}{z-2}}_{:=X_2[z]} \quad \Rightarrow \quad x[n] = x_1[n] - x_2[n]$$

$$\begin{cases} \text{Om } |z| > e^{-2} \xRightarrow{\text{Tab. 10:4}} x_1[n] = e^{-2n}u[n] \\ \text{Om } |z| < e^{-2} \xRightarrow{\text{Tab. 10:13}} x_1[n] = -e^{-2n}u_0[-n] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Om } |z| > 2 \xRightarrow{\text{Tab. 10:4}} x_2[n] = 2^n u[n] \\ \text{Om } |z| < 2 \xRightarrow{\text{Tab. 10:13}} x_2[n] = -2^n u_0[-n] \end{cases}$$

a)

$$\text{Konvergensområde } |z| > 2 \quad \Rightarrow \quad x[n] = \left(e^{-2n} - 2^n\right) u[n]$$

b)

$$\text{Konvergensområde } e^{-2} < |z| < 2 \quad \Rightarrow \quad x[n] = e^{-2n}u[n] + 2^n u_0[-n]$$

c)

$$\text{Konvergensområde } |z| < e^{-2} \quad \Rightarrow \quad x[n] = \left(-e^{-2n} + 2^n\right) u_0[-n]$$