Lösningar till Kontrollskrivning 2022-10-29

Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	d)	b)	a)	b)	c)	c)	d)	a)	a)	b)	b)	b)	c)	a)	d)

1. *Alternativ 1:* Eftersom signalen är periodisk måste både $\omega_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{15}$ rad/s och $\omega_2 = \dfrac{4}{9\sqrt{2}}$ rad/s vara heltalsmultiplar av grundvinkelfrekvensen ω_0.
För vart och ett av fallen har vi följande.

   a) Eftersom
$$\frac{\omega_1}{\frac{\sqrt{2}}{10}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}\,\mathrm{rad/s}}{\frac{\sqrt{2}}{10}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}}{\frac{\sqrt{2}}{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\cdot\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \notin \mathbb{Z}$$
   kan vi direkt utesluta a).

   b) Eftersom både
$$\frac{\omega_1}{\frac{\sqrt{2}}{90}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}\,\mathrm{rad/s}}{\frac{\sqrt{2}}{90}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}}{\frac{\sqrt{2}}{90}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\cdot\frac{90}{\sqrt{2}} = 12 \in \mathbb{Z}$$
   och
$$\frac{\omega_2}{\frac{\sqrt{2}}{90}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{4}{9\sqrt{2}}\,\mathrm{rad/s}}{\frac{\sqrt{2}}{90}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{4}{9\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{90}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}\cdot\frac{90}{\sqrt{2}} = 20 \in \mathbb{Z}$$
   kan vi inte direkt utesluta b).
   (Anmärkning: Med viss eftertanke skulle vi dock kunna utesluta b) här, eftersom $\mathrm{sgd}(12, 20) \neq 1$.)

   c) Alternativ c) kan direkt uteslutas, eftersom varken ω_1 eller ω_2 kan fås som heltalsmultiplar av $\frac{8}{135}$ rad/s.

   d) Eftersom både
$$\frac{\omega_1}{\frac{2\sqrt{2}}{45}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}\,\mathrm{rad/s}}{\frac{2\sqrt{2}}{45}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{15}}{\frac{2\sqrt{2}}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\cdot\frac{45}{2\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Z}$$
   och
$$\frac{\omega_2}{\frac{2\sqrt{2}}{45}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{4}{9\sqrt{2}}\,\mathrm{rad/s}}{\frac{2\sqrt{2}}{45}\,\mathrm{rad/s}} = \frac{\frac{4}{9\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{2}}{45}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}\cdot\frac{45}{2\sqrt{2}} = 5 \in \mathbb{Z}$$
   är alternativ d) möjligt.

   Valet står alltså mellan alternativ b) och alternativ d), och eftersom $\frac{2\sqrt{2}}{45}$ rad/s $> \frac{\sqrt{2}}{90}$ rad/s skall vi välja alternativ d).

   Alternativ 2: Beräkna $\omega_0 = \mathrm{sgd}(\omega_1, \omega_2)$ genom att faktorisera ω_1 och ω_2 och förlänga så att alla icke-heltalsfaktorer finns i båda (de röda faktorerna visar vad vi förlängt med):
$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{15}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot{\color{red}3\cdot\dfrac{1}{3}}\,\mathrm{rad/s}, \\ \omega_2 = \dfrac{4}{9\sqrt{2}}\,\mathrm{rad/s} = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot{\color{red}5\cdot\dfrac{1}{5}}\,\mathrm{rad/s}. \end{cases}$$

Vi ser att $\omega_0 = \text{sgd}(\omega_1, \omega_2) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\,\text{rad/s} = \frac{2\sqrt{2}}{45}\,\text{rad/s}$, alltså alternativ d).

Svar: d)

2. Här är det lättast att jämföra serierna för $\tilde{x}(t)$ och $x(2t)$, och därigenom identifiera koefficienterna $\tilde{D}_n$. Vi får då

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n \, e^{jn\tilde{\omega}_0 t} \qquad \text{respektive} \qquad x(2t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \, e^{jn\omega_0(2t)},$$

och eftersom dessa skall vara lika kan vi avläsa att $\tilde{\omega}_0 = 2\omega_0$ och $\tilde{D}_n = D_n$, vilket motsvarar alternativ b).

Svar: b)

3. *Alternativ 1:* Medelvärdesnivån för signalen ges som bekant av D_0. Signalen är strikt positiv för alla t, så $D_0 > 0$ utesluter alternativ b). Signalens maxvärde är e, och dess medelvärde måste vara mindre än e, så vi kan utesluta alternativ d) också.

Den som minns (eller kommer på att härleda) egenskapen för *spegling*, dvs om $x(t) \Leftrightarrow D_n$ så gäller $x(-t) \Leftrightarrow D_{-n}$, ser att alternativ c) måste höra till en spegelsymmetrisk signal, vilket vi inte har, så vi kan utesluta c). Kvar blir alltså alternativ a).

Alternativ 2: Vi kan beräkna fourierseriekoefficienterna D_n direkt genom D_n-integralen. Eftersom grundperiodtiden är $T_0 = 1\,\text{s}$ blir grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = 2\pi\,\text{rad/s}$, och vi får

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{1} \int_1 x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_0^1 e^t \cdot e^{-j2\pi n t}\, dt = \left[\frac{e^{(1-j2\pi n)t}}{1 - j2\pi n} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{1-j2\pi n}}{1 - j2\pi n} - \frac{1}{1 - j2\pi n} = \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} \cdot \frac{e^1}{1 - j2\pi n} - \frac{1}{1 - j2\pi n} = \frac{e-1}{1 - j2\pi n}. \end{aligned}$$

Detta visar att rätt alternativ är a).

Svar: a)

4. *Alternativ 1:* En Diracimpuls har arean ett koncentrerad till en enda punkt ($t = 0$) längs t-axeln, så när vi integrerar med ett intervall som innehåller den punkten kommer integralen få värdet ett. Så är fallet i a) och c). I d) beror integralens värde på övre gränsen t — om $t > 0$ får vi med Diracimpulsen och integralens värde blir ett, och i annat fall blir integralen noll, så det stämmer att integralen blir $u(t)$. Det felaktiva alternativet är alltså b).

Alternativ 2: Vi kan enkelt beräkna

$$\mathscr{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, d\omega = 1 \neq u(t),$$

vilket visar att b) inte stämmer.

Svar: b)

5. Alternativ a) verkar suspekt med tanke på skalfaktorn, men vi behåller den tillsvidare. Alternativ b) kan direkt uteslutas eftersom signalen växer obegränsat och sålunda inte är absolutintegrerbar. Alternativ c) och d) är speglade varianter av varandra. Om vi fouriertransformerar något av de kvarvarande alternativen, till exempel c), kommer vi dels att få svar på om det skall vara $u_0(t)$ eller $u(t)$, och dels vart tvåan och trean tar vägen. Enligt definitionen blir

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{3e^{2t}u_0(-t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} 3e^{2t} u_0(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 3e^{2t} u_0(-t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= 3 \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\, e^{-j\omega t}\, dt = 3 \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}\, dt = 3 \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2 - j\omega} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{3}{2 - j\omega}, \end{aligned}$$

eftersom gränsvärdet för den undre gränsen är noll. Vi ser här att råkade vara just alternativ c) som gav rätt svar, men om det hade varit a) eller d) istället hade vi lätt utifrån beräkningen kunnat se vilken det skulle vara.

Svar: c)

6. Eftersom alternativen är så pass olika känns det bäst att inverstransformera $X(\omega)$, istället för att transformera de föreslagna signalerna.

   Vi börjar alltså beräkna inverstransformen

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} &= \mathscr{F}^{-1}\{\underbrace{u(\omega+3)-u(\omega+1)}_{\text{vänstra "lådan"}}+\underbrace{u(\omega-1)-u(\omega-3)}_{\text{högra "lådan"}}\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(u(\omega+3)-u(\omega+1)+u(\omega-1)-u(\omega-3)\big)\,e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{-1} e^{j\omega t}\,d\omega}_{\text{vänstra "lådan"}}+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{3} e^{j\omega t}\,d\omega}_{\text{högra "lådan"}} = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{1}^{3}\right) \\
&= \frac{1}{j2\pi t}(e^{-3jt}-e^{-jt}+e^{3jt}-e^{jt}) = \frac{1}{j2\pi t}(e^{3jt}-e^{jt}-e^{-jt}+e^{-3jt}).
\end{aligned}
$$

   Detta liknar inte direkt något av alternativen, men vi kan åtminstone utesluta a) och b), eftersom de innehåller Heaviside-funktioner, och inte kan ha något t i någon nämnare.

   För att välja rätt mellan alternativ c) och d) kan vi till exempel skriva om dem med Eulers formler för sinus och cosinus, och utveckla produkterna:

$$
\begin{aligned}
&\text{c)}\quad \frac{2}{\pi}\cos(2t)\,\mathrm{sinc}(t) = \frac{2}{2\cdot 2jt\cdot\pi}(e^{2jt}+e^{-2jt})(e^{jt}-e^{-jt}) = \frac{1}{j2\pi t}(e^{3jt}-e^{jt}-e^{-jt}+e^{-3jt}), \\
&\text{d)}\quad \frac{2}{\pi}\cos(t)\,\mathrm{sinc}(2t) = \frac{2}{2\cdot 4jt\cdot\pi}(e^{jt}+e^{-jt})(e^{2jt}-e^{-2jt}) = \frac{1}{j4\pi t}(e^{3jt}+e^{jt}-e^{-jt}-e^{-3jt}).
\end{aligned}
$$

   Alltå anges den rätta signalen i alternativ c).

   Svar: c)

7. Alternativ a) kan enkelt vederläggas genom att betrakta den begränsade signalen $x(t)=-u_0(-t)$, för vilken vi får $X_{\mathrm{I}}(s)=0$ respektive $X_{\mathrm{II}}(s)=\frac{1}{s}$ med konvergensområde $\mathrm{Re}\,s<0$. Eftersom signalen $x(t)=-u_0(-t)$ är antikausal ser vi att även alternativ b) är felaktigt. Vi har inte definierat enhetssteget för komplexa tal, så faktorn $u(s)$ gör att alternativ c) faller bort. Kvar blir det korrekta alternativet d).

   Svar: d)

8. Vi kan omedelbart utesluta de obegränsade signalerna i alternativ b) och d).

   Om vi partialbråksuppdelar $X(s)$ får vi

$$
X(s)=\frac{5s-1}{s^2-1}=\frac{5s-1}{(s+1)(s-1)}=\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s-1}.
$$

   Polerna är alltså $s=\pm 1$, och eftersom konvergensområdet för en begränsad signal måste innehålla imaginära axeln måste $-1<\mathrm{Re}\,s<1$. Vi befinner oss alltså till *höger* om polen i bråket $\frac{3}{s+1}$, som alltså ger upphov till en *högersidig* term. På samma sätt skall vi vara till *vänster* om polen i bråket $\frac{2}{s-1}$, som alltså ger en *vänstersidig* term. Det måste därför vara a) som är korrekt.

   Svar: a)

9. *Alternativ 1:* Om vi multiplicerar ihop nämnaren i b) ser vi att den blir samma som i d), och alternativen är därför identiska. Det skall enbart finnas ett korrekt alternativ, så både b) och d) måste vara felaktiga.

   Genom att laplacetransformera högerledet i ekvationen,

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{e^{-2t}\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-2t}\, e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+2)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-(s+2)t}}{s+2}\right]_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+2},$$

   ser vi att det behövs en faktor $s+2$ i nämnarpolynomet, vilket inte finns i alternativ c). Det finns däremot i alternativ a), som ju har samma nämnarpolynom som b) och d).

   Alternativ 2: Vi kan härleda transformegenskapen för derivering, och använda för att transformera begynnelsevärdesproblemet. Vi beräknar

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y'(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} y'(t)\, e^{-st}\, dt = \Big/ \text{partialintegration} \Big/ \\ &= \left[y(t)e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} y(t)\, e^{-st}\, dt = -y(0^-) + sY(s).\end{aligned}$$

   Speciellt är $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y'(t)\} = sY(s) - 2$.
   Låter vi $z(t) = y'(t)$ ser vi att

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y''(t)\} = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{z'(t)\} = s\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y'(t)\} - y'(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 6.$$

   Begynnelsevärdesproblemet transformeras nu enligt

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y''(t)\} - 3\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y'(t)\} + 5\mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{y(t)\} = \mathscr{L}_{\mathrm{I}}\{e^{-2t}\}$$

   till

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 2s - 6 - 3sY(s) + 6 + 5Y(s) &= \frac{1}{s+2} \\ \iff (s^2 - 3s + 5)Y(s) &= \frac{1}{s+2} + 2s \\ \iff (s^2 - 3s + 5)Y(s) &= \frac{2s^2 + 4s + 1}{s+2} \\ \iff Y(s) &= \frac{2s^2 + 4s + 1}{(s+2)(s^2 - 3s + 5)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 - s^2 - s + 10}. \end{aligned}$$

   Svar: a)

10. Sambandet i b) är felaktigt, då

$$\mathscr{Z}\{\delta[n-m]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-m]\, z^{-n} = z^{-m} \neq z^m.$$

   Alternativt kan vi gå igenom de andra alternativen och se att de stämmer:

   Sambandet i a) gäller eftersom

$$\mathscr{Z}\{u_0[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0[-n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = [\text{se formelbladet}] = \frac{z}{1-z}$$

   då $|z| < 1$.

Sambandet i c) stämmer också, ty

$$\mathscr{Z}\{(-2)^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-2)^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n} = [\text{se formelbladet}] =$$
$$= \frac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = \frac{z}{z+2}$$

då $|z| > 2$.

Signalen $u[n+1]-u[n-1]$ är ett för $n=-1$ och för $n=0$, och noll för övrigt. Därför blir

$$\mathscr{Z}\{u[n+1]-u[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(u[n+1]-u[n-1])\, z^{-n} = \sum_{n=-1}^{0} z^{-n} = z+1,$$

dvs även d) stämmer.

Svar: b)

11. Alternativ c) är uppenbarligen fel, eftersom vi inte får vända signalen i samband med enkelsidig z-transform (däremot gäller sambandet om vi använder den dubbelsidiga z-transformen).

    För den enkelsidiga z-transformen betraktar vi endast $n \geq 0$, och då är $x[n]\, u[n+1] = x[n]$, vilket ger $\mathscr{Z}_{\mathrm{I}}\{x[n]\, u[n+1]\} = \mathscr{Z}_{\mathrm{I}}\{x[n]\} = X[z]$, så alternativ a) är fel.

    För att välja rätt mellan alternativ b) och c) kan vi till exempel beräkna

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_{\mathrm{I}}\{x[n+1]\, u[n]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]\, \underbrace{u[n]}_{=1}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]\, z^{-n} \\ &= /k = n+1/ = \sum_{k=1}^{\infty} x[k]\, z^{-(k-1)} = z\sum_{k=1}^{\infty} x[k]\, z^{-k} \\ &= z\left(-x[0] + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, z^{-k}}_{=X[z]}\right) = zX[z] - zx[0],\end{aligned}$$

    vilket visar att alternativ b) är det rätta.

    Svar: b)

12. Nämnaren till $X[z]$ är faktoriserad åt oss (och ingen av faktorerna kan förkortas bort mot något i täljaren), så kan direkt läsa av polerna $z=-1$, $z=-2$, och $z=-3$. En enkelpol i $z=\gamma$ ger (som bekant?) upphov till en term i signalen med γ^n multiplicerat med någon konstant gånger $u[n]$ eller $u_0[-n]$ (beroende på konvergensområdet). Alternativ a) och c) har fel typ av termer, och kan därför uteslutas. På grund av konvergensområdet skall termerna som innehåller $(-1)^n$ och $(-2)^n$ väljas kausala och termen som innehåller $(-3)^n$ skall väljas antikausal. Detta är bara fallet i alternativ b).

    Svar: b)

13. Enhetscirkeln ligger i konvergensområdet för den angivna z-transformen $X[z]$, så fouriertransformen fås genom att sätta in $z = e^{j\Omega}$. Vi ser att $X[z]$ har två singulära punkter, vilka befinner sig i $z = \pm\frac{j}{2} = \frac{1}{2}e^{\pm j\pi/2}$, så närmaste punkten på enhetscirkeln har samma vinkel som en av dessa, $\Omega = \frac{\pi}{2}$ rad.

    Svar: c)

14. Alternativ a) stämmer, enär

$$X[\Omega]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \iff X[-\Omega]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[-n]e^{-j(-\Omega)(-n)}=\mathscr{F}\{x[-n]\}.$$

Det går även att, ett i sänder, utesluta de andra alternativen:

$$x[n-n_0]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X[\Omega]\,e^{j\Omega(n-n_0)}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\underbrace{X[\Omega]\,e^{-j\Omega n_0}}_{\mathscr{F}\{x[n-n_0]\}}e^{j\Omega n}\,d\Omega,$$

så b) stämmer inte.

Om $x[n]=\delta[n]$ är $x[-n]=\delta[-n]=\delta[n]$, och vi ser att c) inte kan stämma ($\mathscr{F}\{\delta[n]\}=1\neq -1$).

För reella signaler gäller $x^*[n]=x[n]$, och eftersom det finns reella signaler som inte har reell fouriertransform (t.ex. $\delta[n-1]$), så måste alternativ d) vara fel.

Svar: a)

15. Termen $\pm(-5)^n u[n]$ inte är fouriertransformerbar, eftersom motsvarande geometriska serie är divergent (och därför inte absolutsummerbar). Vi kan därför utesluta alternativen a) och b).

Vi fouriertransformerar $x[n]=(-0.2)^n u[n]+\lambda\cdot 5^n u_0[-n]$, och får därvid

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\big((-0.2)^n u[n]+\lambda\cdot 5^n u_0[-n]\big)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-0.2)^n e^{-j\Omega n}+\lambda\sum_{n=-\infty}^{-1}5^n e^{-j\Omega n}=\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-0.2e^{-j\Omega})^n+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(5^{-1}e^{j\Omega})^n=[\text{se formelbladet}]=\\ &=\frac{1}{1+0.2e^{-j\Omega}}+\lambda\cdot\frac{5^{-1}e^{j\Omega}}{1-5^{-1}e^{j\Omega}}=\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+0.2}+\lambda\cdot\frac{e^{j\Omega}}{5-e^{j\Omega}}\\ &=-\lambda\cdot\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-5}+\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+0.2}.\end{aligned}$$

För att det skall bli det önskade uttrycket krävs $\lambda=-1$, dvs det rätta alternativet är d).

Svar: d)