Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	**c**	**b**	**b**	**d**	**a**	**a**	**d**	**b**	**a**	**c**	**c**	**a**	**c**	**a,b,c,d**	**c**

Uppgift 14: Alla transformpar är korrekta – det räcker att ange *ett* alternativ för full poäng! ☺

(1) $T_0 = \frac{2}{3}$ sek $\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3\pi$ rad/s $\Rightarrow$ Alla vinkelfrekvenser måste innehålla faktorn π, dvs. a) eller c) är korrekt.

a) & c) $\Rightarrow$ Kvoten mellan alla vinkelfr. är ett rationellt tal, $\Rightarrow$

för $\underline{\underline{c)}}$ gäller $\omega_0 = SGD(9\pi, 12\pi, 18\pi) = SGD(3\cdot 3\pi, 4\cdot 3\pi, 6\cdot 3\pi) = \underline{\underline{3\pi \text{ rad/s}}}$

(2) $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = x(t+3) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 (t+3)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{D_n e^{j3n\omega_0}} \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow \hat{D}_n = D_n e^{j3n\omega_0} \Rightarrow \underline{\underline{b)}}$$

(3) $$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \Big/ \begin{array}{l} T_0 = 2 \text{ sek} \Rightarrow \ (\leftarrow \text{figur}) \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi \text{ rad/s} \end{array} \Big/ = \frac{1}{2}\int_0^2 t \cdot e^{-jn\pi t} dt$$

$$= \Big/ \begin{array}{l} \text{Formelbladet:} \\ \int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1) \end{array} \Big/ \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2}\left(-jn\pi t - 1\right)\right]_0^2$$

$n \neq 0$ ty div. med n

$$= \frac{-1}{2n^2\pi^2}\Big(\underbrace{e^{-jn2\pi}}_{=(e^{-j2\pi})^n = 1^n = 1}(-jn2\pi - 1) - e^0(0-1)\Big)$$

$$= \frac{-1}{2n^2\pi^2}\left(-jn2\pi - 1 + 1\right) = \frac{j}{n\pi} \Rightarrow \underline{\underline{b)}}$$

(4) $\underline{\underline{d)}}$ $\quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

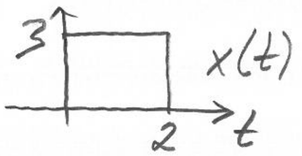
(5) $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{d}{d\omega}\left(e^{-j\omega t}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-jt)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$j \cdot \frac{dX(\omega)}{dt} = \underbrace{-j^2}_{=-(-1)=1} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \Rightarrow \quad j\frac{dX(\omega)}{d\omega} \Leftrightarrow t \cdot x(t)$$

Dvs. a)

(6) 

$$\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, d\omega = \int_{0}^{2} 3 \cdot e^{-j\omega t}\, d\omega$$

$$= 3\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^2 = 3\,\frac{e^{-j2\omega} - e^{0}}{-j\omega} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)}{\omega \cdot 2j}$$

$$= 6 e^{-j\omega} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} = 6 e^{-j\omega} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega}{\pi} \cdot \pi)}{\frac{\omega}{\pi} \cdot \pi} = 6 e^{-j\omega} \cdot \mathrm{sinc}_N\!\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

Alt. $$\to = 6 e^{-j\omega}\, \mathrm{sinc}(\omega)$$

$\Rightarrow$ a)

(7) d) är korrekt : Konv.området blir av typen $Re\{s\} > \sigma_0$, vilket innebär att det inte finns några singulära punkter till höger om $Re\{s\} = \sigma_0$

(8) $$\mathcal{L}_I\{x(t)\} = X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st}\, dt = \Big/ \text{partiell integration} \Big/$$

$$= \left[x(t)e^{-st}\right]_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} x(t) \cdot (-s)\, e^{-st}\, dt = \Big/ \lim_{t\to\infty} \Big|x(t)\overbrace{e^{-\sigma t} \cdot e^{j\omega t}}^{=e^{-st}}\Big| = \lim_{t\to\infty} \left|x(t) e^{-\sigma t}\right| = 0 \Big/$$

$$= -x(0-) + s \cdot \underbrace{\int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}_{=X(s)} \quad \Rightarrow \quad b)$$

Nödvändig för existens av $X(s)$ i konv.-området.

(9) $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^2 t \cdot e^{-st} dt = \Big/$ Part. integr, se formelbladet $(a=-s) \Big/$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2} \left(-s \cdot t - 1 \right) \right]_0^2 = \frac{e^{-2s}(-2s-1) - e^0(0-1)}{s^2}$$

$$= \frac{1-(1+2s)e^{-2s}}{s^2} \Rightarrow \underline{\underline{a)}}$$

(10) $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin(3-m) \underbrace{\delta[n+m]}_{\text{Enhetsimpuls vid } m=-n \text{ (där } n+m=0)} = \sin(3-m)\Big|_{m=-n} = \sin(3+n)$

$$\neq \sin(3-n) \Rightarrow \underline{\underline{c)}}$$

(11) $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad \star \Rightarrow$

$$\mathcal{Z}\{\gamma^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-n}$$

$$= \Big/ \star \Big/ = X\left[\frac{z}{\gamma}\right] \Rightarrow \underline{\underline{c)}}$$

(12) $X[z] = \frac{z^2+12z}{z^2-z-6} = \Big/ z^2-z-6=0 \Rightarrow \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6}_{=-\frac{25}{4}} = 0$

$\Rightarrow z = \pm\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow z_1 = 3,\ z_2 = -2 \Big/$

$$= \frac{z(z+12)}{(z-3)(z+2)} \Rightarrow$$

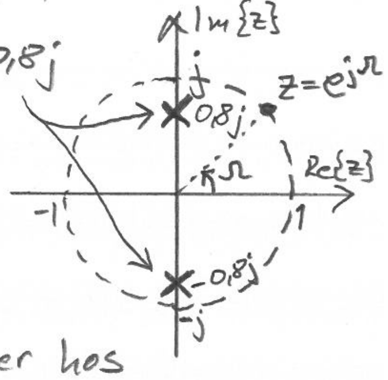
$$\frac{X[z]}{z} = \frac{z+12}{(z-3)(z+2)} = \frac{15/5}{z-3} + \frac{10/-2}{z+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X[z] = 3 \cdot \underset{|z|>3}{\frac{z}{z-3}} - 2 \underset{|z|>2}{\frac{z}{z-(-2)}} \quad (|z|>3)$$

Man kan enkelt visa att $\mathcal{Z}\{\gamma^n u[n]\} = \frac{z}{z-\gamma}$ i $|z|>|\gamma| \Rightarrow$

$$x[n] = 3 \cdot 3^n u[n] - 2(-2)^n u[n] = \left(3^{n+1} + (-2)^{n+1}\right) u[n] \Rightarrow \underline{\underline{a)}}$$

(13) $X[z] = \dfrac{z}{z^2+0{,}8^2} = \dfrac{z}{(z-0{,}8j)(z+0{,}8j)}$; $|z|>0{,}8$



dvs. $X[z]$ har singulära punkter i $z=\pm 0{,}8j$

Eftersom $X[\Omega]$ är lika med $X[z]$ längs enhetscirkeln, dvs. $X[\Omega] = X[z]\big|_{z=e^{j\Omega}}$, så har $|X[\Omega]|$ lokala maxima för Ω-värden då $z=e^{j\Omega}$ ligger nära/närmast singulära punkter hos $X[z]$, som t.ex. för $\Omega=\frac{\pi}{2}$ rad i grafen ($\Rightarrow z=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$)

$\Rightarrow$ alternativ c)

(14) Eftersom $e^{\pm jn\pi} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^n = (-1)^n$, så är tidssignalen densamma i a, b, c & d. Eftersom $X[\Omega]$ är 2π-periodisk så är $X[\Omega-\pi] = X[\Omega+\pi]$, vilket då medför att alla fyra transformpar är korrekta – de är bara uttryckta på olika sätt !! :) Det räcker att ange ett alternativ för att få poäng, men det är bra om du har noterat likheterna.

$$X[\Omega\pm\pi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\Omega\pm\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \underbrace{e^{\pm j\pi n}}_{=(-1)^n} \cdot e^{-j\Omega n}$$

(15) I uppgiften är det uppenbart att $0{,}5^n u[n] \Leftrightarrow \dfrac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0{,}5}$
(den termen är lika i alla fyra $x[n]$)

$2^n u[n]$ är <u>inte</u> absolutintegrerbar $\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \not< \infty\right)$, dvs. den har ingen fouriertransform $\Rightarrow$ a) och b) är felaktiga

$$\mathcal{F}\{2^n u_0[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n e^{-j\Omega n} = \Big/ m=-n \Big/ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^{j\Omega}}{2}\right)^m$$

$$= \Big/ \left|\frac{e^{j\Omega}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{serien konvergerar} \Big/ = \left(\frac{e^{j\Omega}}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{j\Omega}}{2}}$$

$$= \frac{e^{j\Omega}}{2-e^{j\Omega}} = -\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-2}$$

dvs. $-2^n u_0[-n] \Leftrightarrow \dfrac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-2}$ $\Rightarrow$ Alternativ c)