Beteckningar, signaldefinitioner och nyttiga samband

Tidskontinuerlig diracimpuls $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \phi(0) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-T)\,dt = \phi(T) \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

Tidskontinuerligt enhetssteg $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$

$$\text{Alt. } u_0(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t \leq 0 \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0.5; & t = 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Tidsdiskret enhetsimpuls $\delta[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases}$

Tidsdiskret enhetssteg $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n \leq -1 \end{cases}$

$$u_0[n] = u[n-1] = \begin{cases} 1; & n \geq 1 \\ 0; & n \leq 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix}\text{vanlig användn:} \\ u_0[-n]\end{matrix}\right)$$

Signumfunktionen $\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t) = \operatorname{vp}\left\{\frac{t}{|t|}\right\} = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t = 0 \\ -1; & t < 0 \end{cases}$

Enhetsrektangeln $\Pi(t) = \operatorname{rect}(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1; & |t| < 0.5 \\ \frac{1}{2}; & |t| = 0.5 \\ 0; & |t| > 0.5 \end{cases}$

Enhetstriangeln $\Delta(t) = \begin{cases} 1 - 2|t|; & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0; & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

BILAGA: Utdrag ur formelsamlingen för TSDT18,84 Signaler och System

Sinc-funktionen

$$\operatorname{sinc}_N(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \operatorname{sinc}(\pi t), \quad \text{där}$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

$\left(\text{Anm: I en del litteratur kan } \operatorname{sinc}(\bullet) \text{ beteckna } \operatorname{sinc}_N(\bullet)\right)$

Principalvärde $\operatorname{vp}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \begin{cases} 0; & t = 0 \\ \frac{f(t)}{t}; & t \neq 0 \end{cases}$

Geometriska serier/summor

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^m = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{m=k}^{\infty} a^m = a^k \cdot \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{m=k}^{n} a^m = a^k \cdot \frac{1 - a^{n-k+1}}{1-a},$$

$\left(\text{där } n - k + 1 = \text{ antal termer i summan}\right)$

Primitiva funktioner $\int t \cdot e^{at}\,dt = /\text{Partiell integration}/ = \frac{e^{at}}{a^2}(at - 1)$

$$\int \frac{1}{a^2 + t^2}\,dt = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$$

Trigonometriska samband $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$

$$e^{\pm jn\pi} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^n = (-1)^n, \qquad e^{\pm jn2\pi} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^n = 1$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{cases}$$

Tidskontinuerliga signaler

- Från **dirac-impulsens definition**: $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

- **Fourierserieutveckling** av en T_0-periodisk signal $x(t)$:

  $$x(t) = C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cdot\cos(n\omega_0 t+\theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{där } \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

  Signalens **komplexa fourierseriekoefficienter**: $D_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

- **Fouriertransformen** av en tidskontinuerlig signal $x(t)$:

  $$\mathcal{F}\{x(t)\}=X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

- **Inversa fouriertransformen** av $X(\omega)$:

  $$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}=x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

- **Dubbelsidiga laplacetransformen** av en tidskontinuerlig signal $x(t)$:

  $$\mathcal{L}_{\text{II}}\{x(t)\}=X_{\text{II}}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

- **Enkelsidiga laplacetransformen** av en tidskontinuerlig signal $x(t)$:

  $$\mathcal{L}_{\text{I}}\{x(t)\}=X_{\text{I}}(s)=\int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

- **Inversa laplacetransformen** av $X(s)$:

  $$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

BILAGA: Utdrag ur formelsamlingen för TSDT18,84 Signaler och System

Tidsdiskreta signaler

- En **tidsdiskret signal** $x[n]$ kan uttryckas som $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$

- **Fouriertransformen** av en tidsdiskret signal $x[n]$:

  $$\mathcal{F}\{x[n]\}=X[\Omega]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- **Inversa fouriertransformen** av $X[\Omega]$:

  $$\mathcal{F}^{-1}\{X[\Omega]\}=x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

- **Dubbelsidiga z-transformen** av en tidsdiskret signal $x[n]$:

  $$\mathcal{Z}_{\text{II}}\{x[n]\}=X_{\text{II}}[z]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- **Enkelsidiga z-transformen** av en tidsdiskret signal $x[n]$:

  $$\mathcal{Z}_{\text{I}}\{x[n]\}=X_{\text{I}}[z]=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- **Inversa *z*-transformen** av $X[z]$:

  $$x[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{X_{\text{II}}[z]\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_{\text{II}}[z]z^{n-1}\,dz$$