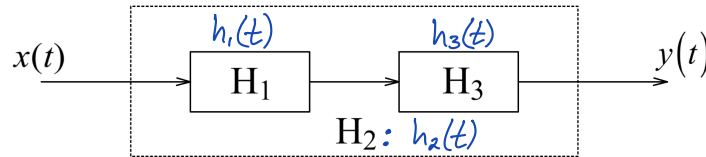


1

Givet:



$$\begin{cases} h_1(t) = e^{at} u_0(-t) \\ h_2(t) = e^{-at} u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(s) = \frac{-1}{s-a} ; \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (\text{Tab. 5:14}) \\ H_2(s) = \frac{1}{s+a} ; \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (\text{Tab. 5:11}) \end{cases}$$

System H_2 stabilt \Rightarrow $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H_2(s)$

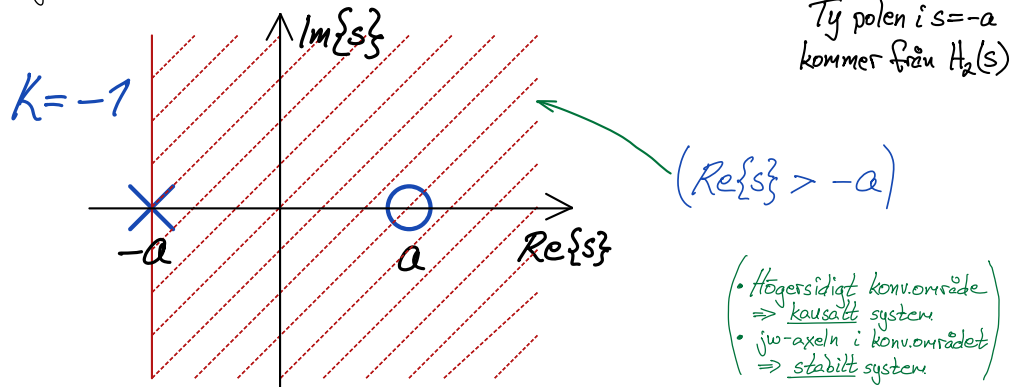
$\Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0$, dvs. polen i $s=-a$ hos $H_2(s)$ ligger i vänster halvplan

Kaskadkoppling $\Rightarrow H_2(s) = H_1(s)H_3(s) \Rightarrow H_3(s) = \frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{1}{s+a} \cdot \frac{s-a}{-1} = -\frac{s-a}{s+a} ; \operatorname{Re}\{s\} > -a$

Behöver ej bevisas

Ty polen i $s=-a$ kommer från $H_2(s)$

Pol-nollställediagram
för $H_3(s)$:



$h_3(t)$: $H_3(s) = -\frac{s+a-2a}{s+a} = -1 + 2a \frac{1}{s+a} ; \operatorname{Re}\{s\} > -a$

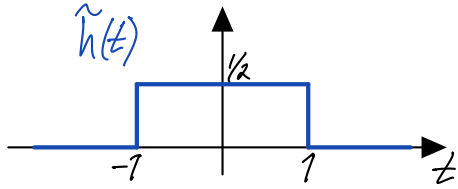
Tab. 5:1 & 5:11 \Rightarrow $h_3(t) = -\delta(t) + 2a \cdot e^{-at} u(t)$

2 a) $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left/ \begin{array}{l} \text{Energifritt system} \Rightarrow y_{zi}(t) = 0 \\ y_{zs}(t) = (x * h)(t) \end{array} \right/ = \underline{(x * h)(t)}$

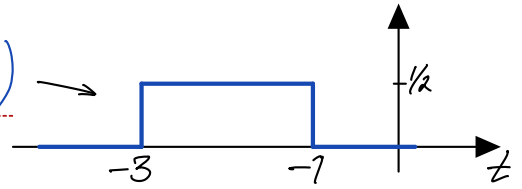
där $x(t) = e^{-t}u(t)$

och $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{j2\omega} \cdot \tilde{H}(\omega)\} = \left/ \text{Tab. 2:8} \right/ = \tilde{h}(t+2)$

där $\tilde{h}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\text{sinc}_N(\frac{\omega}{\pi})\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2} \cdot 2 \text{sinc}_N(\frac{\omega \cdot 2}{2\pi})\} = \left/ \begin{array}{l} \text{Tab. 3:12} \\ r=2 \end{array} \right/ = \frac{1}{2} \text{rect}(\frac{t}{2})$

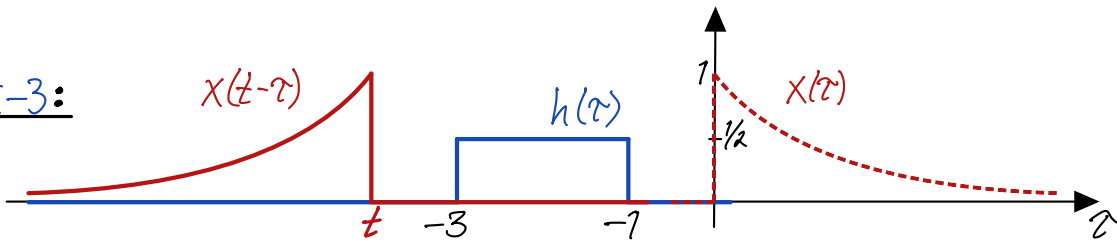


$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} \text{rect}(\frac{t+2}{2})$



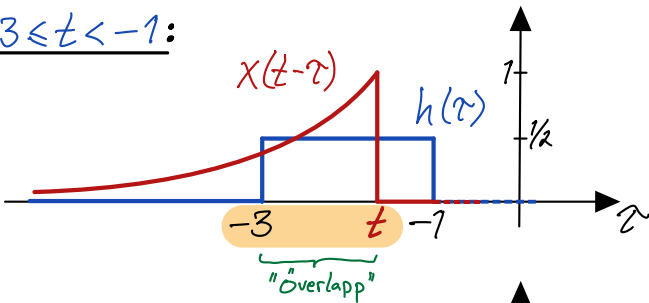
$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$ (eller $\int x(\tau)h(t-\tau) d\tau$)

• $t < -3$:



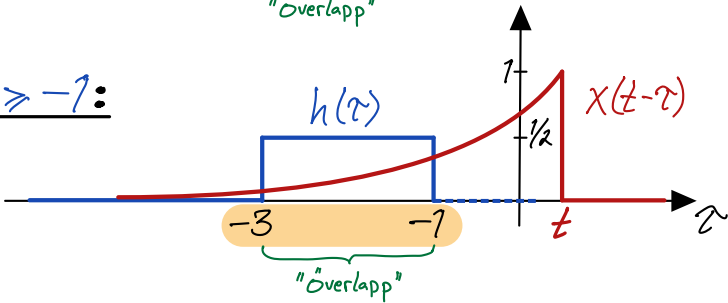
$x(t-\tau)h(\tau) = 0 \quad \forall \tau$
 $\Rightarrow \underline{y(t) = 0}$

• $-3 \leq t < -1$:



$y(t) = \int_{-3}^t e^{-(t-\tau)} \cdot \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-t+\tau}}{1} \right]_{-3}^t$
 $= \underline{\frac{1}{2}(1 - e^{-t-3})}$

• $t \geq -1$:



$y(t) = \int_{-3}^{-1} e^{-(t-\tau)} \cdot \frac{1}{2} d\tau = \frac{1}{2} \left[e^{-t+\tau} \right]_{-3}^{-1}$
 $= \underline{\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-3})e^{-t}}$

Dvs. $y(t) = \begin{cases} 0; & t < -3 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t-3}); & -3 \leq t < -1 \\ \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-3})e^{-t}; & t \geq -1 \end{cases}$

$(= \underline{\frac{1}{2}(1 - e^{-t-3})(u(t+3) - u(t+1)) + (e^{-1} - e^{-3})e^{-t}u(t+1)})$

Alternativ lösning via transformdomänen - se nästa sida!

Alternativt kan $y(t) = y_{25}(t) = (x * h)(t)$ erhållas som $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{25}(s)\}$,

där $Y_{25}(s) = X(s) \cdot H(s)$, där Tab. 5:11 ger $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $\text{Re}\{s\} > -1$

Förligt ovan är $h(t) = \frac{1}{2}(u(t+3) - u(t+1)) \xrightarrow{\text{Tab. 4:5 \& 5:3}} H(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}e^{3s} - \frac{1}{s}e^s\right)$
($\text{Re}\{s\} > -\infty$ ty $e^{3s} - e^s = 0$ för $s=0$, vilket kanceleer polen i $s=0$)

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} e^{3s} - \frac{1}{s} e^s \right) = \left/ \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}} \right/$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} e^{3s} - \frac{1}{s+1} e^s - \frac{1}{s} e^s + \frac{1}{s+1} e^s \right) \quad (\star: \text{Re}\{s\} > 0, \bullet: \text{Re}\{s\} > -1)$$

Tab. 5:3, 5:11 & 4:5 \Rightarrow $y(t) = \frac{1}{2}(u(t+3) - e^{-(t+3)}u(t+3) - u(t+1) + e^{-(t+1)}u(t+1))$
 $= \frac{1}{2}((1 - e^{-(t+3)})u(t+3) - (1 - e^{-(t+1)})u(t+1))$

(Anm: $H(s)$ kan erhållas genom att i $H(\omega) = e^{j2\omega} \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = e^{j2\omega} \frac{\sin(\omega)}{\omega} = e^{j2\omega} \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega \cdot 2}$
byta "j ω " mot "s", men det behövs motiveras utförligt i så fall! Om j ω -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$, så gäller $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$, dvs. $H(\omega)$ är ett specialfall av $H(s)$.
Det omvända gäller inte nödvändigtvis alltid, dvs. du kan inte allmänt låta $H(s) = H(\omega)|_{j\omega=s}$

b) $h(t) \neq 0 \quad \forall t < 0 \Rightarrow$ Systemet är icke-kausalt

(Eftersom $h(t \geq 0) = 0$, så är systemet till och med anti-kausalt,
men det är tillräckligt att svara icke-kausalt.)

c) Här är $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{2} dt = 1 < \infty$

\Rightarrow Systemet är (externt) stabilt.

3

Periodisk insignal:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Stabilit
LTI-system

Butterworth
LP: LTI

Periodisk utsignal:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0) \Rightarrow \text{S\u00f6kt } |\hat{D}_n| = |D_n| \cdot |H(n\omega_0)| \quad \text{I}$$

d\u00e5r $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{/Periodtid } T_0 = 4 \text{ sek. enl. graf/} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s.}$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 3 \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt \quad \left(+ \frac{1}{4} \int_2^4 0 \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt \right)$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{e^{-jn\frac{\pi}{2}t}}{-jn\frac{\pi}{2}} \right]_0^2 = \frac{3}{jn2\pi} (1 - e^{-jn\pi}) = \frac{3}{jn2\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0; & \text{j\u00e4mna } n \neq 0 \\ \frac{3}{jn\pi}; & \text{udda } n \end{cases}$$

n \neq 0 \u00e4r div. med n

II

$$D_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 3 dt = \frac{3}{2} \quad (\text{framg\u00e5r \u00e4ven av figuren})$$

Butterworth LP \Rightarrow $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_p})^{2N}}}$ Formels. sid 13

$$\Rightarrow |H(n\omega_0)| = \left/ \omega_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} \right/ = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n \cdot \frac{\pi}{2}}{4}\right)^{2 \cdot 3}}} \quad \text{III}$$

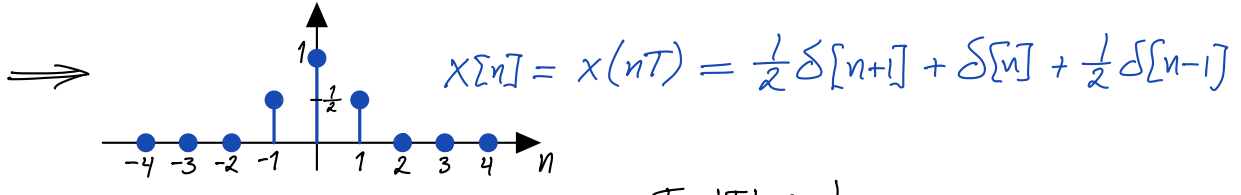
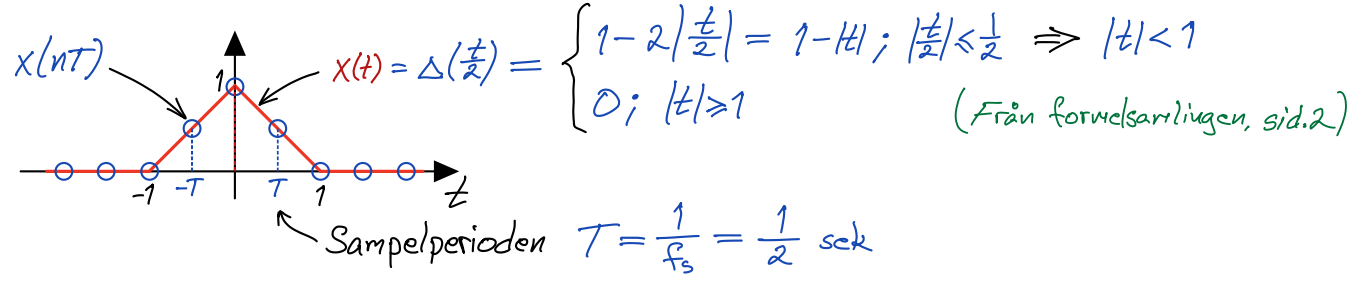
$\omega_p = 4 \text{ rad/s, } N=3$

$\left(\frac{n\pi}{8}\right)^6$

II & III

$$\text{I} \Rightarrow |\hat{D}_n| = \begin{cases} |C_0| \cdot |H(0)| = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}; & n=0 \\ 0; & \text{j\u00e4mna } n \neq 0 \\ \frac{3}{n\pi \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{8}\right)^6}}; & \text{udda } n \end{cases}$$

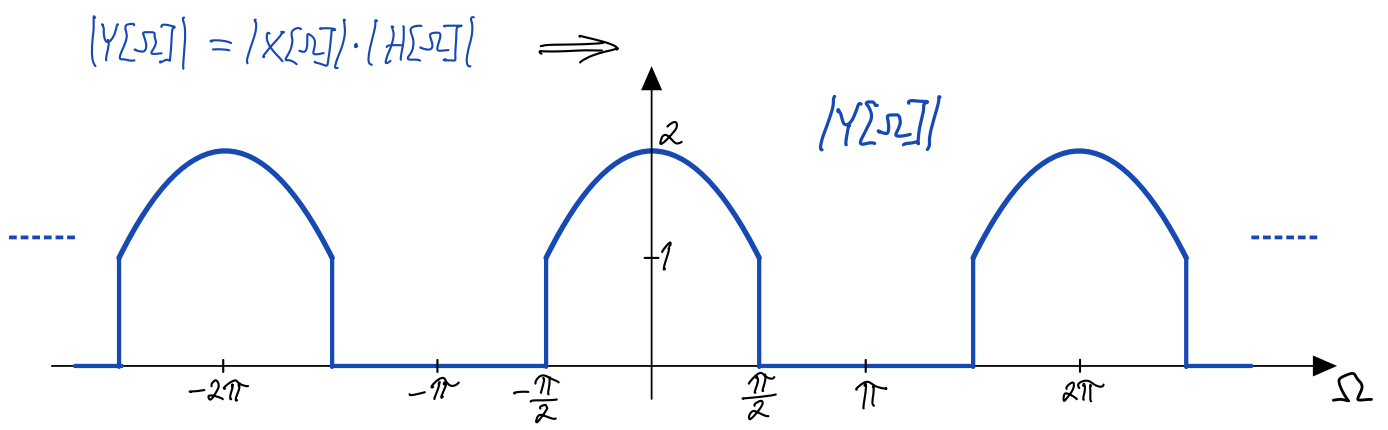
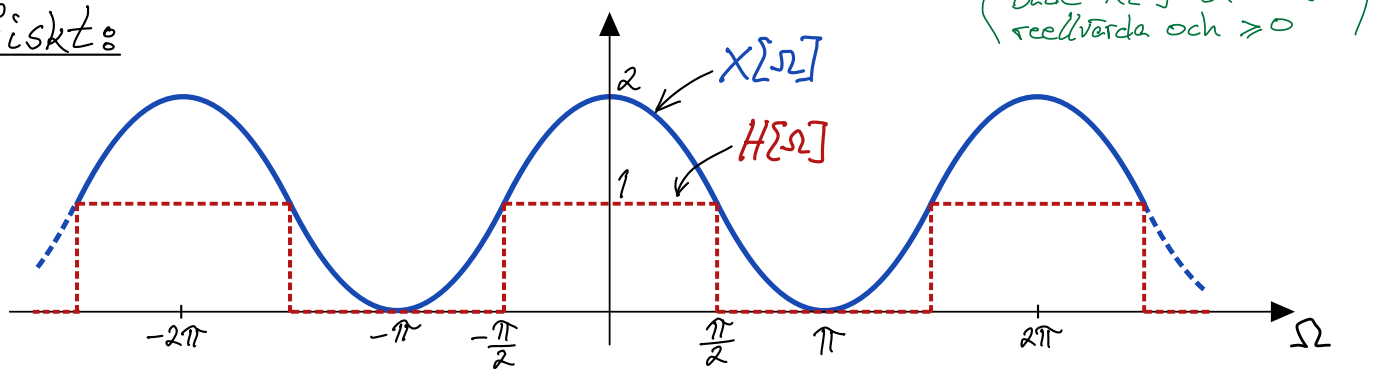
4



Sökt: $|Y[\Omega]|$, där $Y[\Omega] = X[\Omega]H[\Omega]$ (Ty LTI-system)

där $\left\{ \begin{aligned} X[\Omega] &= \mathcal{F}\{x[n]\} = / \text{Tab. 8:2} / = \frac{1}{2} e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega} = \underline{1 + \cos(\Omega)} \\ H[\Omega] &= \mathcal{F}\{h[n]\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \text{sinc}_N\left(\frac{n}{2}\right)\right\} = / \text{Tab. 8:10 med } \Omega_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} / \\ &= \begin{cases} 1; & |\Omega| \leq \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \text{ rad} \end{cases} \end{aligned} \right.$

Grafiskt:



- 5) a) För insignalen $x[n] = 0.5^n u[n] + u[n]$ erhålls utsignalen $y[n] = 2\delta[n] - 1.5\delta[n-1]$. Här behöver vi anta att $y[n] = y_{zs}[n] = (x * h)[n]$ dvs. systemet är energifritt ($y_{zi}[n] = 0$)

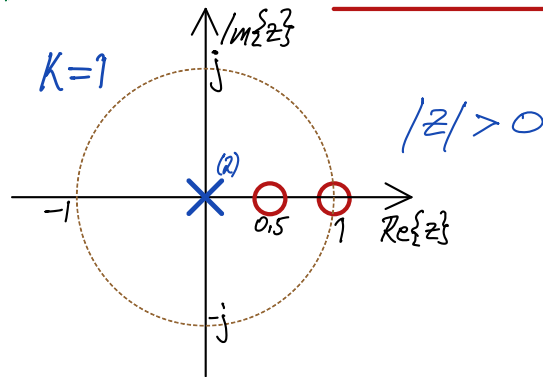
LTI-system $\Rightarrow H[z] = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]} \quad (*)$

där $\begin{cases} Y_{zs}[z] = Y[z] = /Tab. 10:1 \& 10:2/ = 2 - 1.5z^{-1} = \frac{2z - 1.5}{z} ; |z| > 0 \\ X[z] = /Tab. 10:4 \& 10:3/ = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-1} = \frac{z(z-1.5)}{(z-0.5)(z-1)} ; |z| > 1 \end{cases}$

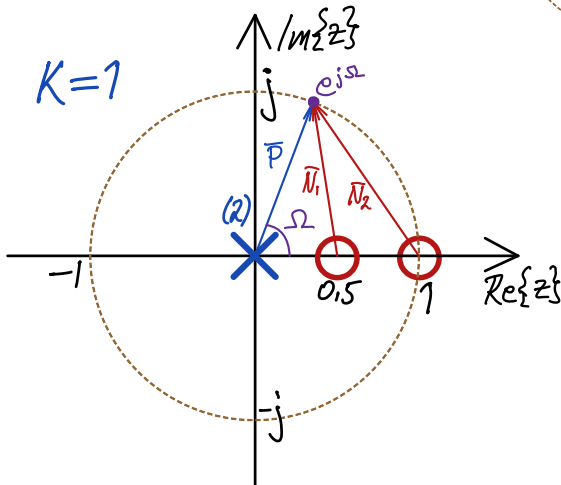
$\Rightarrow H[z] = \frac{(2z - 1.5)(z - 0.5)(z - 1)}{z \cdot z(2z - 1.5)} = \frac{(z - 0.5)(z - 1)}{z^2} ; |z| > 0$

ty dubbelpol i origo

Pol-nollställediagram
för $H[z]$:



b)



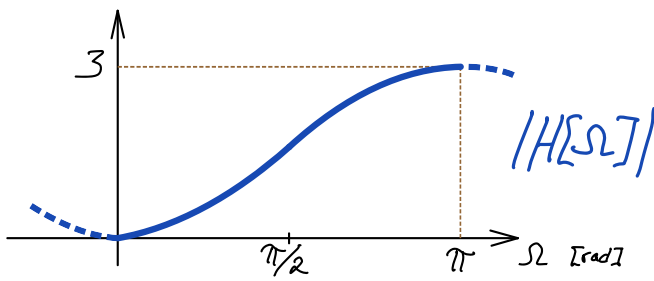
$H[\Omega] = H[z]_{z=e^{j\Omega}} = |H[\Omega]| \cdot e^{j\arg H[\Omega]}$

där $|H[\Omega]| = K \cdot \frac{|N_1| \cdot |N_2|}{|P|^2} = /K=1, |P|=1/ = |N_1| \cdot |N_2|$

$\Omega = 0 \Rightarrow |N_2| = 0 \Rightarrow H[0] = 0$ 1.2.3

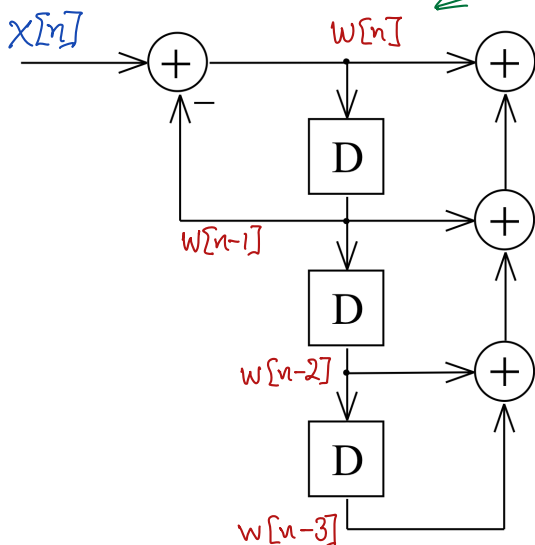
$\Omega = \pi \text{ rad} \Rightarrow |N_1| = 1.5, |N_2| = 2 \Rightarrow |H[\pi]| = 1.5 \cdot 2 = 3$

$\Omega: 0 \rightarrow \pi \Rightarrow |H[\Omega]|$ växer från 0 till 3 (lokalt max vid $\Omega = \pi/2$ rad, då man på enhetscirkeln är längst bort från nollställena.)



Dämpning vid låga normaliserade vinkelfr. och $|H[\Omega]|$ ökar för högre $\Omega: \Omega \rightarrow \pi$ rad \Rightarrow Detta är ett HP-filtter

6) a) Inför hjälpstorheten $w[n]$ enligt figuren:



$$y[n] = w[n] + w[n-1] + w[n-2] + w[n-3] \quad (1)$$

$$\text{där } w[n] = x[n] - w[n-1] \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z\{1\} \\ Z\{2\} \end{array} \right. \Rightarrow Y[z] = W[z](1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z\{1\} \\ Z\{2\} \end{array} \right. \Rightarrow W[z] = X[z] - z^{-1}W[z] \Rightarrow W[z] = X[z] \cdot \frac{1}{1 + z^{-1}} \quad (4)$$

$$(3) \ \& \ (4) \Rightarrow Y[z] = X[z] \cdot \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 + z^{-1}} = X[z] \cdot \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^2(z+1)}$$

$$\text{LTI-system} \Rightarrow \underline{H[z]} = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]} = \left. \begin{array}{l} \text{Vid systemanalys är systemet energifritt} \\ \Rightarrow Y = Y_{zs} \end{array} \right/$$

$$= \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^2(z+1)} = \frac{(z^2+1)(z+1)}{z^2(z+1)} = \underline{\underline{\frac{z^2+1}{z^2} ; |z| > 0}}$$

$$b) \ x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

Enhetscirkeln ingår i konvergensområdet för $H[z]$ ($|z| > 0$)

\Rightarrow Systemet är stabil \leftarrow (Behöver motiveras)

Formels. sid 15 \Rightarrow Då är LTI-systemets utsignal $y[n] = |H[e^{j\frac{\pi}{3}}]| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \arg H[e^{j\frac{\pi}{3}}]\right)$

$$\text{där } \underline{H[e^{j\frac{\pi}{3}}]} = |H[z]|_{z=e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{z^2+1}{z^2} = 1 + z^{-2} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{3}}(e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{\pi}{3}}) \cdot \frac{2}{2} = e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=0,5} \cdot 2 = 1 \cdot e^{j(-\frac{\pi}{3})}$$

$$\text{Dvs. } \underline{H[e^{j\frac{\pi}{3}}]} = 1, \quad \underline{\arg H[e^{j\frac{\pi}{3}}]} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

\uparrow $H[e^{j\frac{\pi}{3}}]$ \uparrow $\arg H[e^{j\frac{\pi}{3}}]$

$$\Rightarrow \underline{y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{3}\right)}$$