

① a) $\int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{y(t)}{dt} + 4y(t) \right\} = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right\}$ (Att, använd $\int_{\mathbb{R}}$ med initialtillst. = 0, ty $H(s)$ beräknas för energifritt system?)

Tab. 4:10 $\Rightarrow s^2 Y(s) + 4s Y(s) + 4Y(s) = sX(s) + X(s)$

$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+4} = \frac{s+1}{(s+2)^2}$ Kausalt system \Rightarrow konv. omr. $\text{Re}\{s\} > -2$

$H(s) = \frac{s+2-1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$ $\text{Re}\{s\} > -2$

Tab. 5:11 & 5:12 $\Rightarrow h(t) = e^{-2t} u(t) - t e^{-2t} u(t) = (1-t) e^{-2t} u(t)$

(Att: $H(s) = s \cdot \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2}$, dvs. $H(s) = s \cdot \hat{H}(s) + \hat{H}(s)$ där $\hat{H}(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$, $\text{Re}\{s\} > -2$)
 Tab. 5:12 & 4:10 $\Rightarrow h(t) = \frac{d\hat{h}(t)}{dt} + \hat{h}(t)$, där $\hat{h}(t) = t e^{-2t} u(t) \Rightarrow h(t) = \dots$
 \Rightarrow Lite krångligare invers transformering, så det är bra att i stället göra den enkla omskrivningen av $H(s)$ ovan

b) $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$, där $y_{zi}(t) = y(t)|_{x(t)=0}$ & $y_{zs}(t) = y(t)|_{\text{Energifritt system}}$

$x(t)=0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{d^2 y_{zi}(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_{zi}(t)}{dt} + 4y_{zi}(t) \right\} = 0$

Tab. 4:10 $\Rightarrow s^2 Y_{zi}(s) - s y(0-) - y'(0-) + 4(s Y_{zi}(s) - y(0-)) + 4 Y_{zi}(s) = 0$

$\Rightarrow (s^2 + 4s + 4) Y_{zi}(s) = 2s + 9$

$\Rightarrow Y_{zi}(s) = \frac{2s+9}{s^2+4s+4} = \frac{2(s+2)+5}{(s+2)^2} = 2 \frac{1}{s+2} + 5 \frac{1}{(s+2)^2}$ ($\text{Re}\{s\} > -2$)

Tab. 5:11 & 5:12 $\Rightarrow y_{zi}(t) = 2e^{-2t} u(t) + 5t e^{-2t} u(t)$

$= (2+5t) e^{-2t} u(t)$

$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y_{zs}(s) = X(s) H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^2}$ ($\text{Re}\{s\} > -2$)

Tab. 5:12 $\Rightarrow y_{zs}(t) = t e^{-2t} u(t)$

Svar: $y_{zi}(t)$ & $y_{zs}(t)$ enl. ovan

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (2+6t) e^{-2t} u(t)$

(Anm: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, där $Y(s)$ erhålls från $\int_{\mathbb{R}} \{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} = \int_{\mathbb{R}} \{x'(t) + x(t)\}$, men då behöver $y(t)$ i stället delas upp i delsignalerna $y_{zi}(t)$ & $y_{zs}(t)$)

② $E_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \text{Parsevals teorem} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$ [Formels. sid. 5]

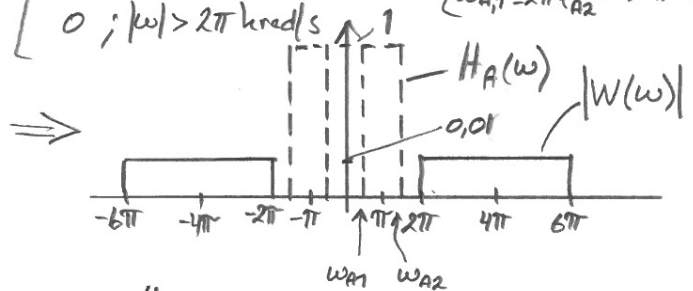
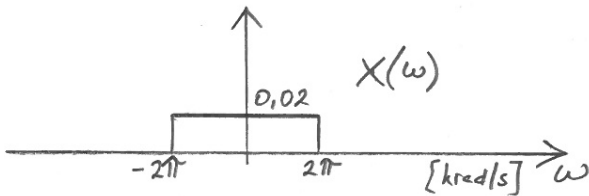
$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega)$

$Y_1(\omega) = W(\omega) H_A(\omega)$ $W(\omega)$ enl. nedan, $H_A(\omega)$ enl. graf nedan.

$w(t) = x(t) \cdot z(t)$, där $z(t) = \sin(4\pi \cdot 10^3 t) \Rightarrow Z(\omega) = j\pi(\delta(\omega + 4\pi \cdot 10^3) - \delta(\omega - 4\pi \cdot 10^3))$
 $\Rightarrow W(\omega) = \frac{1}{2\pi} (X(\omega) * Z(\omega)) = \frac{j\pi}{2\pi} (X(\omega) * \delta(\omega + 4\pi \cdot 10^3) - X(\omega) * \delta(\omega - 4\pi \cdot 10^3))$
 $= \frac{j}{2} (X(\omega + 4\pi \cdot 10^3) - X(\omega - 4\pi \cdot 10^3))$

$x(t) = 40 \text{sinc}_N(2 \cdot 10^3 t)$ Tab. 3:13 $\Rightarrow X(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{100}; |\omega| \leq 2\pi \text{ krad/s} \\ 0; |\omega| > 2\pi \text{ krad/s} \end{cases}$

H_A : BP-filter med gränsvinkelfrekvenser
 $\omega_{A1} = 2\pi f_{A1} = 0,5\pi \text{ krad/s}$
 $\omega_{A2} = 2\pi f_{A2} = 1,5\pi \text{ krad/s}$



$Y_2(\omega) = Y_2(\omega) = V(\omega) \cdot H_B(\omega) = X(\omega) \cdot H_C(\omega) \cdot H_B(\omega)$

$\Rightarrow Y_1(\omega) = W(\omega) H_A(\omega) = 0 \quad \forall \omega$

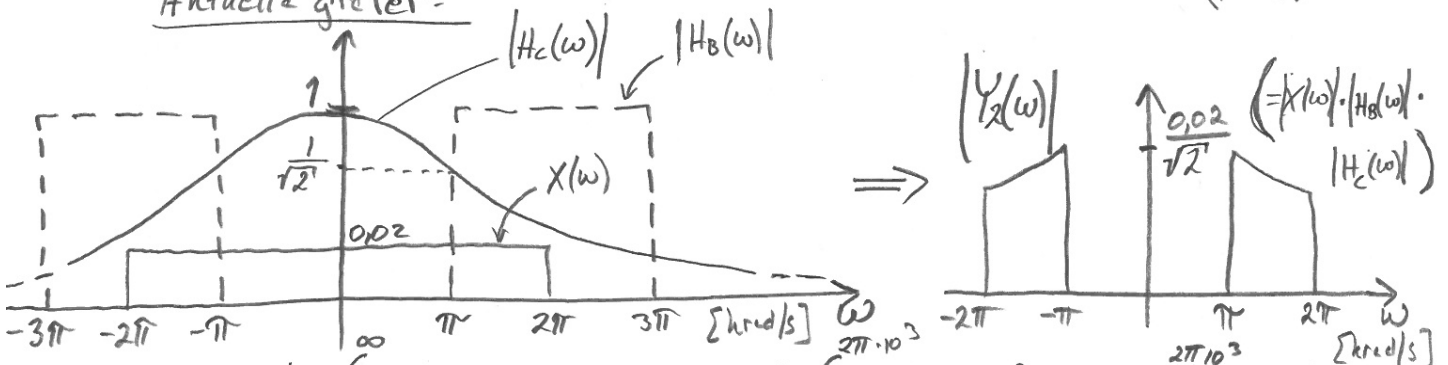
H_B : Bandpass filter med gränsvinkelfrekvenser

$\omega_{B1} = 2\pi f_{B1} = \pi \text{ krad/s}$
 $\omega_{B2} = 2\pi f_{B2} = 3\pi \text{ krad/s}$ (se graf nedan)

H_C : Butterworth filter, $N=1$, $\omega_P = 2\pi \cdot 500 \text{ rad/s} = \pi \text{ krad/s}$

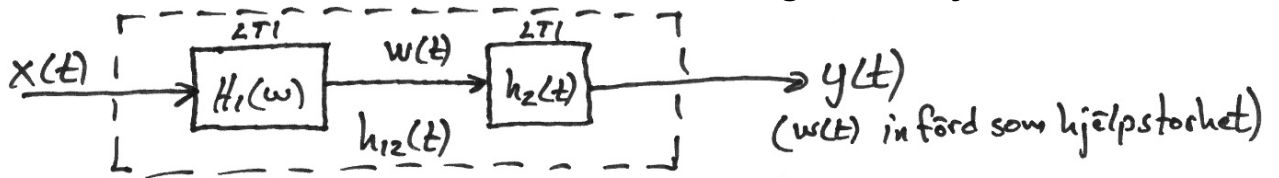
Formels. sid 13 $\Rightarrow |H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_P})^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{10^3\pi})^2}}$

Aktuella grafen =



$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y_1(\omega) + Y_2(\omega)|^2 d\omega = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\pi \cdot 10^3}^{2\pi \cdot 10^3} |0,02 \cdot H_C(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\pi \cdot 10^3}^{2\pi \cdot 10^3} \frac{0,02^2}{1 + (\frac{\omega}{10^3\pi})^2} d\omega$
 $= \int_{\lambda = \frac{\omega}{10^3\pi}} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\lambda = \text{Formels. sid 3}$
 $= 0,4 [\arctan \lambda]_1^2 = 0,4 (\arctan 2 - \arctan 1) \approx 0,13$

3



a) $y(t) = w(t) * h_2(t) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = x(t) * h_{12}(t)$

$\Rightarrow h_{12}(t) = h_1(t) * h_2(t)$ där $h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(w)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{10^3 + jw}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-10^3 t}}{1}\right\}$

$\Rightarrow h_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau$

Formels. Tab 3:5

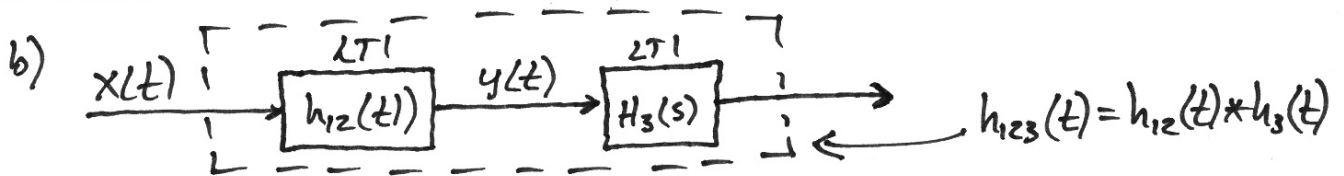
$t < 0 \Rightarrow h_{12}(t) = 0$

$t \geq 0 \Rightarrow h_{12}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-10^3 \tau} \cdot 8 e^{-10^3(t-\tau)} d\tau = 8 e^{-10^3 t} \int_0^t 1 d\tau = 8 t e^{-10^3 t}$

$\Rightarrow h_{12}(t) = 8 t e^{-10^3 t} \cdot u(t)$

Alternativt kan impulssvaret beräknas m.h.a. z-transformer:

$$h_{12}(t) = h_1(t) * h_2(t) \Leftrightarrow H_{12}(w) = H_1(w) \cdot H_2(w) = \frac{h_2(t) = 8 h_1(t)}{\Rightarrow H_2(w) = 8 H_1(w)}$$

$$= 8 (H_1(w))^2 = \frac{8}{(10^3 + jw)^2} \Rightarrow \text{Formels. Tab. 3:8} \Rightarrow h_{12}(t) = 8 t e^{-10^3 t} \cdot u(t)$$


$\Rightarrow H_{123}(s) = H_{12}(s) \cdot H_3(s)$

där $H_{12}(s) = \mathcal{L}\{h_{12}(t)\} = \mathcal{L}\{8 t e^{-10^3 t} u(t)\} = \frac{8}{(s + 10^3)^2}$ (Formels. Tab 5:12)

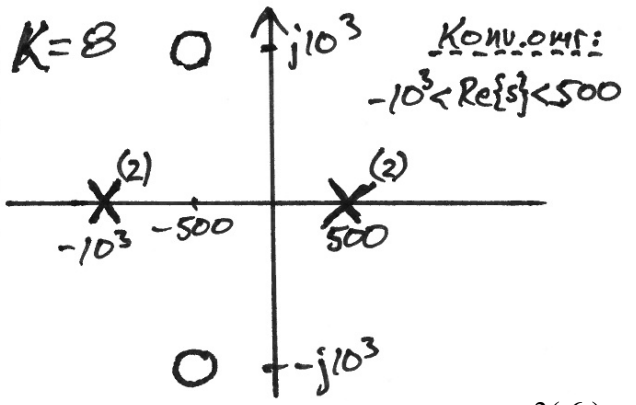
$= \frac{8}{(s + 10^3)^2}; \text{Re}\{s\} > -10^3$

$\Rightarrow H_{123}(s) = \frac{8((s + 500)^2 + (10^3)^2)}{(s + 10^3)^2 \cdot (s - 500)^2}$

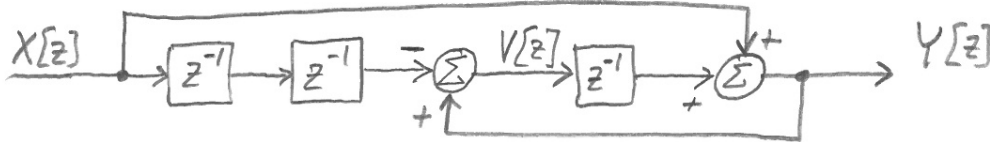
Konv.OMF: $\text{Re}\{s\} > -10^3 \quad \text{Re}\{s\} < 500$

Anm: konv. omr. för $H_3(s)$ är $\text{Re}\{s\} < 500$, eftersom systemet är stabilt \Leftrightarrow ju-axeln ligger i konv. omr. för $H_3(s)$

Pol-nollst. diagram för $H_{123}(s)$:



④ a) Ansätt en hjälpstorhet $V[n]$ ($V[z]$) efter den vänstra summatorn:

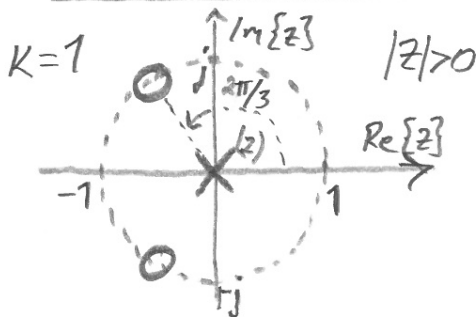


$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} Y[z] &= X[z] + z^{-1}V[z], \text{ där} \\ V[z] &= Y[z] - z^{-2}X[z] \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y[z](1-z^{-1}) = X[z](1-z^{-3}) \Rightarrow$$

$$\underline{H[z]} = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{z^3-1}{z^2(z-1)} = \left(\begin{array}{l} \text{Uppenbart att det finns både} \\ \text{nollställe \& pol i } z=1 \end{array} \right)$$

$$= \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z^2 \cdot (z-1)} = \frac{z^2+z+1}{z^2} ; |z| > 0 \left(\begin{array}{l} \text{Kevselt system, erhålls} \\ \text{från signelflödesschemat.} \\ \text{\& från enda möjliga} \\ \text{konv.ovrödet.} \end{array} \right)$$

Pol-nollställediagram:



$(z^3-1$ har 3 nollställen, symmetriskt/jämnt fördelade längs enhetscirkeln, vid $z=e^{j0}=1$ & $z=e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$. Nollstället vid $z=1$ tas bort, enl. ovan, av polen vid $z=1$)

Skiss av $|H[\Omega]|$: Enhetscirkeln ingår i konv.ovrödet för $H[z] \Rightarrow$

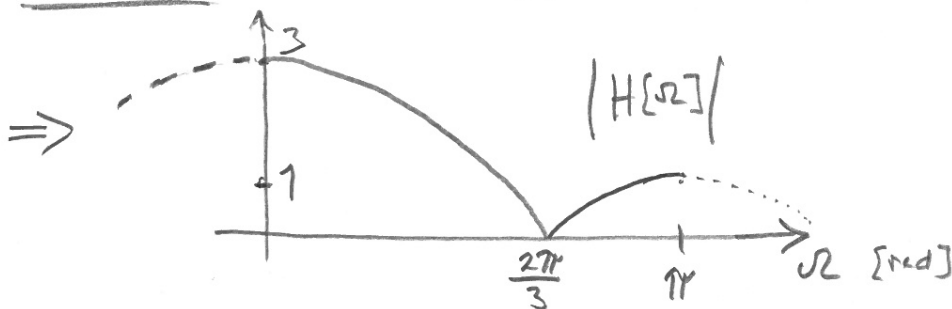
$$\Rightarrow H[\Omega] = H[z]_{z=e^{j\Omega}}. \text{ Det blir krångligt/otympligt att skissera dock}$$

$$|H[\Omega]| \text{ utgående från } |H[\Omega]| = |1+z^{-1}+z^{-2}|_{z=e^{j\Omega}} = |1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}|.$$

Från pol-nollställediagrammet ser man att det räcker att beräkna $|H[\Omega]|$ för $\Omega=0$, $\Omega=\frac{2\pi}{3}$ och $\Omega=\pi$ red och sedan skissera grafen för övriga Ω i intervallet $0 \leq \Omega \leq \pi$ red:

$$\bullet \underline{|H[\Omega=0]| = |H[z=1]| = \left| \frac{1^2+1+1}{1^2} \right| = 3}, \quad |H[\Omega=\frac{2\pi}{3}]| = |H[z=e^{j\frac{2\pi}{3}}]| = 0$$

$$\bullet \underline{|H[\Omega=\pi]| = |H[z=-1]| = \left| \frac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1)^2} \right| = 1} \quad (\text{nollställe i } z=e^{j\frac{2\pi}{3}})$$



b) $H[z] = 1 + z^{-1} + z^{-2}$

Lösning i tidsdomänen: Tab. 10:1 & 10:2 $\Rightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

g[n] = $u[n] * h[n] = u[n] * \delta[n] + u[n] * \delta[n-1] + u[n] * \delta[n-2]$
 $= u[n] + u[n-1] + u[n-2]$

Lösning i transformdomänen:

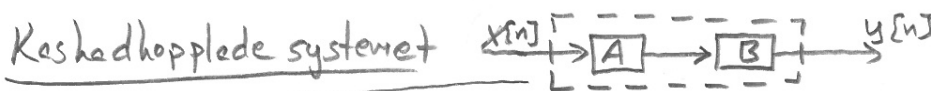
$g[n] = u[n] * h[n] \Leftrightarrow G[z] = U[z] \cdot H[z] = / \text{Tab. 10:3} / = \frac{z}{z-1} (1 + z^{-1} + z^{-2})$
 $= \frac{z}{z-1} + z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} + z^{-2} \cdot \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1) \quad \underbrace{\quad}_{|z| > 1} \quad \underbrace{\quad}_{|z| > 0}$

Tab. 10:3 & 9:2 $\Rightarrow \underline{g[n] = u[n] + u[n-1] + u[n-2]}$

⑥ System A: $\mathcal{Z}_{\pi} \{z[n] - 0.5z[n-1]\} = \mathcal{Z}_{\pi} \{x[n]\} \Rightarrow Z[z] (1 - 0.5z^{-1}) = X[z]$

$\Rightarrow \underline{H_A[z]} = \frac{Z[z]}{X[z]} = \frac{z}{z - 0.5}$

System B: $\mathcal{Z}_{\pi} \{y[n] - 2y[n-1]\} = \mathcal{Z}_{\pi} \{z[n]\} \Rightarrow \underline{H_B[z]} = \frac{Y[z]}{Z[z]} = \frac{z}{z - 2}$

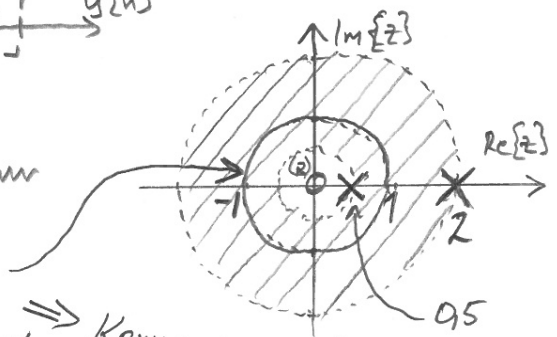


$\Rightarrow H[z] = H_A[z] \cdot H_B[z] = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 2)}$

Enl. uppgift är det totala systemet stabilt

\Rightarrow Enhetscirkeln $|z|=1$ ligger i konv. omr. för $H[z]$

h[n]: $H[z] = / \text{part. bröksuppdel.} / \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 2)}$
 $= \frac{-1}{3} \cdot \frac{z}{z - 0.5} + \frac{4}{3} \cdot \frac{z}{z - 2}$
 (Tips: PBU gärna) \Rightarrow Konv. omr. $0.5 < |z| < 2$
 ($= u[-n-1]$)



Formels. Tab 10:4 & 10:13 $\Rightarrow \underline{h[n] = \frac{-1}{3} 0.5^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u_0[-n]}$

$h[n] \neq 0$ för minst ett n -värde < 0 & $\geq 0 \Rightarrow$ (generellt) icke-kausalt system (Följer även av konv. omr. utseende)

Delsystemen:

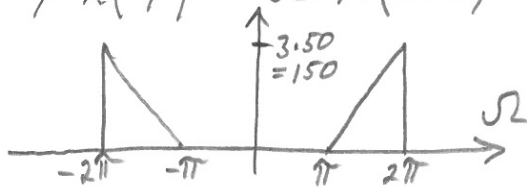
Konv. omr. för $H[z] \Rightarrow$ Konv. omr. för $\begin{cases} H_A[z] \text{ är } |z| > 0.5 \\ H_B[z] \text{ är } |z| < 2 \end{cases}$

Tab. 10:4 $\Rightarrow \underline{h_A[n] = z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 0.5} \right\} = 0.5^n u[n]}$. $h_A[n] = 0$ för $n < 0 \Rightarrow$ System A är kausalt

Tab. 10:13 $\Rightarrow \underline{h_B[n] = z^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 2} \right\} = -2^n u_0[-n]}$. $h_B[n] = 0$ för $n \geq 0 \Rightarrow$ System B är anti-kausalt

(Kausalitetsegenskaperna för system A & B erhålls alternativt / även direkt från konvergensomr. för $H_A[z]$ resp. $H_B[z]$) (Det är ok att svara icke-kausalt)

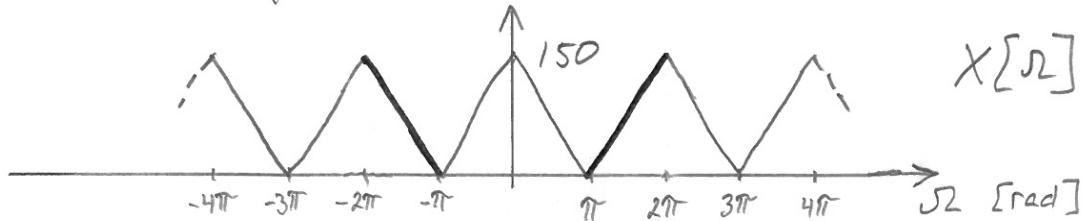
5) a) Poissons summationsformel (Formels. sid. 9): $X[\Omega] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - n2\pi}{T}\right)$
 $\frac{1}{T} X\left(\frac{\Omega}{T}\right) = 50 X(50\Omega)$ visas nedan:



Amplitudskalning av $X(\omega)$ med faktor 50 samt frekvensskalning/hoptryckning, också med en faktor 50:

$$\begin{cases} \omega = 50\pi \text{ rad/s} \rightarrow \Omega = \frac{50\pi}{50} = \pi \text{ rad} \\ \omega = 100\pi \text{ rad/s} \rightarrow \Omega = \frac{100\pi}{50} = 2\pi \text{ rad} \end{cases}$$

$X[\Omega]$ erhålls genom addera förshjutna ($n \cdot 2\pi$) kopior av detta spektrum:



b) $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2 = \left/ \begin{matrix} \text{Parseval formel} \\ \text{Formels. sid. 8} \end{matrix} \right/ = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |X[\Omega]|^2 d\Omega$

$= \left/ \begin{matrix} \text{P.g.a.} \\ \text{symmetri} \end{matrix} \right/ = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(150 - \frac{150}{\pi} \Omega\right)^2 d\Omega$

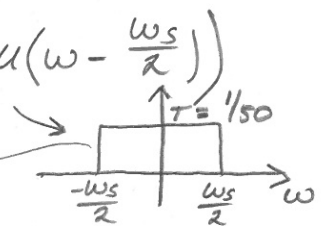
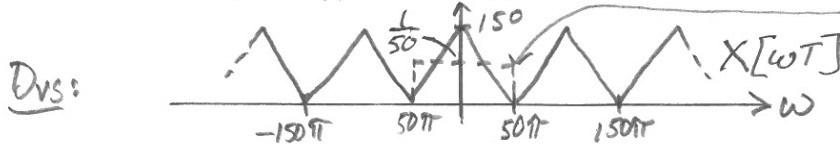
$= \frac{150^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\Omega}{\pi}\right)^3 d\Omega = \frac{150^2}{\pi} \left[\frac{\left(1 - \frac{\Omega}{\pi}\right)^3}{3 \cdot \frac{-1}{\pi}} \right]_0^{\pi}$

$= \frac{-150^2}{3} \left(\left(1 - \frac{\pi}{\pi}\right)^3 - \left(1 - \frac{0}{\pi}\right)^3 \right) = \frac{150^2}{3} = \underline{\underline{7500}}$

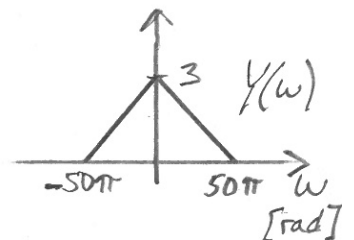
c) Formels. sid. 9: $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = X[\omega T] \cdot H(\omega)$

Ideal rekonstr. $\Rightarrow H(\omega) = T \left(u\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right) \right)$

där $\frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{2 \cdot T} = \frac{\pi}{1/50} = 50\pi \text{ rad/s}$



$$\Rightarrow Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{50} \cdot X[\omega T] & ; |\omega| \leq 50\pi \text{ rad/s} \\ 0 & ; |\omega| > 50\pi \text{ rad/s} \end{cases}$$



Formels. Tab. 3:15 \Rightarrow

$\underline{\underline{y(t) = 3 \cdot \frac{50\pi}{2\pi} \text{sinc}_N\left(\frac{50\pi t}{2\pi}\right) = 75 \text{sinc}_N^2(25t)}}$