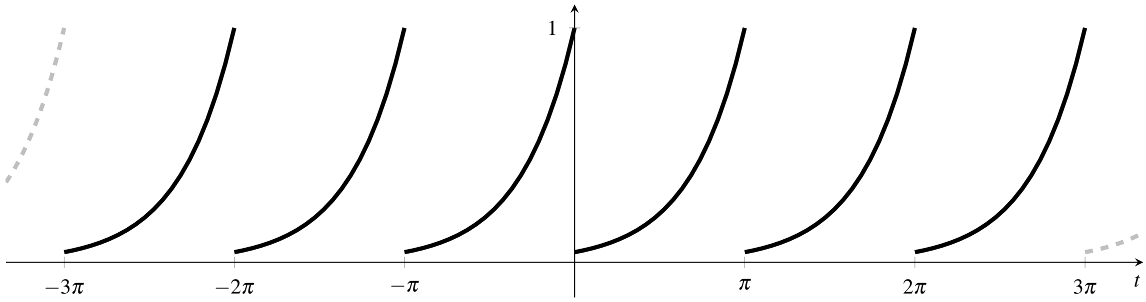
# Lösningar till Kontrollskrivning 2021-01-08

1. a) **Svar:** Se figuren.




b) Signalen $x(t)$ är $\pi$-periodisk, vilket gör att grundvinkelfrekvensen är $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$. De komplexa fourierseriekoefficienterna ges därför av

$$D_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x(t)\,e^{-j\omega_0 nt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{t}\,e^{-j2nt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{(1-j2n)t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(1-j2n)t}}{1-j2n}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-e^{-(1-j2n)\pi}}{\pi(1-j2n)} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi(1-j2n)}.$$

**Svar:** De komplexa fourierseriekoefficienterna är $D_n = \dfrac{1-e^{-\pi}}{\pi(1-j2n)}$.

c) Eftersom

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\,e^{j\omega_0 nt}$$

blir

$$\tilde{x}(t) = x(-2t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\,e^{j\omega_0 n(-2t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n}\,e^{j2\omega_0 nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n\,e^{j\tilde{\omega}_0 nt}.$$

Alltså är $\tilde{D}_n = D_{-n}$. Observera dock att signalerna inte kommer att ha samma grundvinkelfrekvens och grundperiodtid.

**Svar:** De komplexa fourierseriekoefficienterna blir $\tilde{D}_n = D_{-n} = \dfrac{1-e^{-\pi}}{\pi(1+j2n)}$.

2. a) *Alternativ 1:* Vi kan direkt beräkna fouriertransformen utifrån definitionen. Vi får då

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/2}u(t-1)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{1}^{\infty} e^{-t/2}\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{1}^{\infty} e^{-(1/2+j\omega)t}\,dt =$$
$$= \left[\frac{e^{-(1/2+j\omega)t}}{-(1/2+j\omega)}\right]_{1}^{\infty} = \frac{e^{-(1/2+j\omega)}}{1/2+j\omega} = e^{-1/2}\cdot\frac{e^{-j\omega}}{1/2+j\omega}.$$

*Alternativ 2:* Tabell 8.3.5 ger

$$e^{-at}u(t) \xmapsto{\mathscr{F}} \frac{1}{a+j\omega},$$

varpå Tabell 8.2.8 ger

$$e^{-a(t-1)}u(t-1) \xmapsto{\mathscr{F}} \frac{e^{-j\omega}}{a+j\omega}.$$

Multiplikation på båda sidor med $e^{-a}$, följt av insättning av $a = \frac{1}{2}$, ger svaret.

**Svar:** Fouriertransformen av $\tilde{x}(t)$ är $\tilde{X}(\omega) = e^{-1/2}\cdot\dfrac{e^{-j\omega}}{1/2+j\omega}$.

b) För att $x(t)$ skall sakna diskontinuiteter måste $K = e^{-1/2}$. Signalen $x(t)$ kan nu uttryckas med hjälp av $\tilde{x}(t)$ och rektangelpulsen $\Pi(t) = \mathrm{rect}(t)$ enligt

$$x(t) = \tilde{x}(-t) + e^{-1/2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \tilde{x}(t).$$

Med hjälp av Tabell 8.2.7 samt Tabell 8.3.12 får vi

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \tilde{X}(-\omega) + 2e^{-1/2}\,\mathrm{sinc}(\omega) + \tilde{X}(\omega) = \\
&= e^{-1/2}\cdot\frac{e^{j\omega}}{1/2 - j\omega} + 2e^{-1/2}\,\mathrm{sinc}(\omega) + e^{-1/2}\cdot\frac{e^{-j\omega}}{1/2 + j\omega} = \\
&= 2e^{-1/2}\,\mathrm{sinc}(\omega) + e^{-1/2}\left(\frac{e^{j\omega}}{1/2 - j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{1/2 + j\omega}\right) = \\
&= 2e^{-1/2}\,\mathrm{sinc}(\omega) + e^{-1/2}\cdot\frac{e^{j\omega}(1/2 + j\omega) + e^{-j\omega}(1/2 - j\omega)}{1/4 + \omega^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sinc}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} + 2j\omega\cdot\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2}}{\frac{1}{4} + \omega^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sinc}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\cos\omega - 2\omega\sin\omega}{\frac{1}{4} + \omega^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sinc}(\omega) + \frac{4}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\cos\omega - 2\omega\sin\omega}{1 + 4\omega^2}.
\end{aligned}$$

Detta går att skriva ännu enklare (tack till anonymkod A-4163!), eftersom

$$\begin{aligned}
X(\omega) = \ldots &= \frac{2}{\sqrt{e}}\,\mathrm{sinc}(\omega) + \frac{4}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\cos\omega - 2\omega\sin\omega}{1 + 4\omega^2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2\cos\omega - 4\omega\sin\omega}{1 + 4\omega^2}\right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\sin\omega + 4\omega^2\sin\omega + 2\omega\cos\omega - 4\omega^2\sin\omega}{\omega(1 + 4\omega^2)} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\sin\omega + 2\omega\cos\omega}{\omega(1 + 4\omega^2)} = \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{\mathrm{sinc}\,\omega + 2\cos\omega}{1 + 4\omega^2}.
\end{aligned}$$

**Svar:** Fouriertransformen av $x(t)$ är $X(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{e}}\cdot\dfrac{\mathrm{sinc}\,\omega + 2\cos\omega}{1 + 4\omega^2}$.

3. a) Uttrycket för $X(s)$ är en rationell funktion i $s$, vilket innebär att signalen kommer att bestå av signaler som är avskurna med antingen $u(t)$ eller $u_0(-t)$. Då gradtalet i täljaren är strängt lägre än gradtalet i nämnaren innehåller signalen inga diracfunktioner.

Faktorisering av nämnarpolynomet ger $s^2 - s - 6 = (s+2)(s-3)$, vilket betyder att polerna till $X(s)$ är $s = -2$ respektive $s = 3$. Det finns alltså tre möjliga konvergensområden:

$\mathrm{Re}\,s < -2$ : *Vänstersidigt* konvergensområde till vänster om båda polerna. Med detta konvergensområde blir signalen vänstersidig, dvs *antikausal*.

$-2 < \mathrm{Re}\,s < 3$ : Konvergensområdet ligger mellan de båda polerna. Konvergensområdet innehåller imaginära axeln, och signalen är *begränsad* (eftersom den saknar diracfunktioner).

$3 < \mathrm{Re}\,s$ : *Högersidigt* konvergensområde till höger om båda polerna. Med detta konvergensområde blir signalen högersidig, dvs *kausal*.

**Svar:** Se ovan.

b) För att få den begränsade inverstransformen skall vi enligt a) använda $-2 < \operatorname{Re} s < 3$ som konvergensområde för $X(s)$. Med hjälp av partialbråksuppdelning följt av Tabell 8.5.10 (för termen tillhörande polen $s = -2$) och Tabell 8.5.14 (för termen tillhörande polen $s = 3$) får vi

$$x_{\mathrm{b}}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{13-s}{s^2-s-6}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{13-s}{(s+2)(s-3)}\right\} =$$
$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-3}{s+2} + \frac{2}{s-3}\right\} = -3e^{-2t}u(t) - 2e^{3t}u_0(-t).$$

**Svar:** Den begränsade signalen är $x_{\mathrm{b}}(t) = -3e^{-2t}u(t) - 2e^{3t}u_0(-t)$.

c) För att få den kausala signalen behöver vi använda konvergensområdet som ligger till höger om båda polerna. Det innebär att vi behöver byta tecken och ”sidighet” på termen som hör ihop med polen $s = 3$, och vi får därför $x_{\mathrm{k}}(t) = -3e^{-2t}u(t) + 2e^{3t}u(t)$.

**Svar:** Den kausala signalen är $x_{\mathrm{k}}(t) = -3e^{-2t}u(t) + 2e^{3t}u(t)$.

4. a) Enligt definitionen är z-transformen

$$B_m[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_m[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{m}{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^{-n} = (1+z^{-1})^m,$$

där sista likheten följer av *binomialsatsen*. Summan är ändlig, och konvergerar alltså för alla $z \neq 0$, dvs $|z| > 0$.

**Svar:** z-transformen av $b_m[n]$ är $B_m[z] = \left(1+z^{-1}\right)^m$, med konvergensområde $|z| > 0$.

b) Med hjälp av resultatet i a) tillsammans med Tabell 9.4.7 och Tabell 9.4.4 får vi

$$X[z] = \mathscr{Z}\{x[n]\} = B_2\left[\frac{z}{-1}\right] + z^{-4}B_3[z] = \left(1-z^{-1}\right)^2 + z^{-4}\left(1+z^{-1}\right)^3.$$

Om man vill utveckla parenteserna kan man svara med

$$X[z] = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-4} + 3z^{-5} + 3z^{-6} + z^{-7}.$$

Konvergensområdet blir samma som i a), och med samma motivering.

**Svar:** z-transformen av $x[n]$ är $X[z] = \left(1-z^{-1}\right)^2 + z^{-4}\left(1+z^{-1}\right)^3$ med konvergensområde $|z| > 0$.

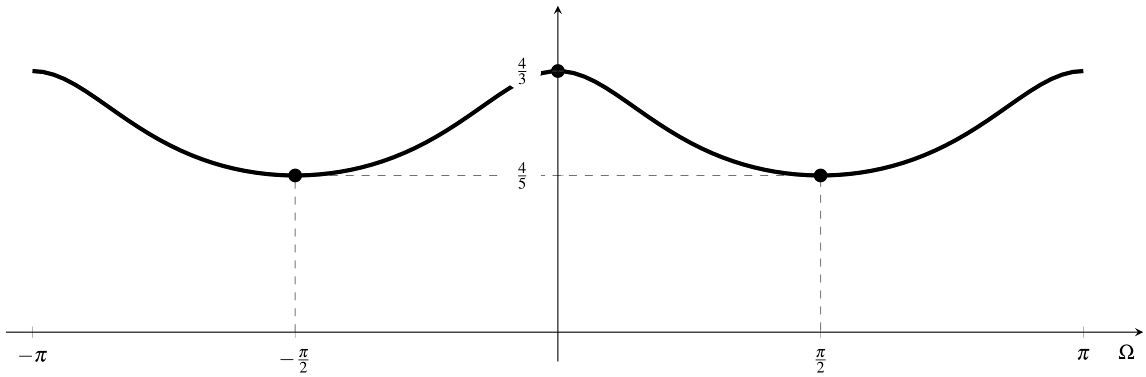
5. a) *Alternativ 1:* Fouriertransformen $X[\Omega]$ kan tolkas som z-transformen $X[z] = \frac{4z}{1-4z^2}$ längs enhetscirkeln, dvs för $z = e^{j\Omega}$. Vi ser att $X[z]$ har poler symmetriskt i $z = \pm\frac{1}{2}$. Signalens amplitudspektrum kommer alltså att anta sitt största värde för $\Omega = 0$ rad respektive $\Omega = \pi$ rad, och sitt lägsta värde för $\Omega = \pm\frac{\pi}{2}$ rad. Största värdet blir $\left|X[0]\right| = \left|X[\pi]\right| = \frac{4}{3}$, och minsta värdet blir $\left|X[\pm\frac{\pi}{2}]\right| = \frac{4}{5}$. Vi kan nu skissa kurvan nedan.

*Alternativ 2:* Vi kan explicit beräkna

$$\left|X[\Omega]\right| = \left|\frac{4e^{j\Omega}}{1-4e^{j2\Omega}}\right| = \frac{\left|4e^{j\Omega}\right|}{\left|1-4e^{j2\Omega}\right|} = \frac{4}{\left|1-4\cos(2\Omega)-4j\sin(2\omega)\right|} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{\left(1-4\cos(2\Omega)\right)^2 + 4^2\sin^2(2\omega)}} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{1-8\cos(2\Omega)+16\cos^2(2\Omega)+16\sin^2(2\omega)}} = \frac{4}{\sqrt{17-8\cos(2\Omega)}},$$

och skissa kurvan.

**Svar:** Se nedan.




b) Fouriertransformen $X[\Omega]$ kan tolkas som z-transformen $X[z] = \frac{4z}{1-4z^2}$ längs enhetscirkeln, dvs för $z = e^{j\Omega}$. Vi ser att $X[z]$ har poler symmetriskt i $z = \pm\frac{1}{2}$, som båda ligger innanför enhetscirkeln, så signalen kommer att vara högersidig (kausal). Med hjälp av partialbråk-suppdelning och Tabell 9.5.4 får vi

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \mathscr{Z}^{-1}\{X[z]\} = \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{4z}{1-4z^2}\right\} = \mathscr{Z}^{-1}\left\{z \cdot \frac{4}{(1+2z)(1-2z)}\right\} = \\
&= \mathscr{Z}^{-1}\left\{z \cdot \left(\frac{2}{1+2z} + \frac{2}{1-2z}\right)\right\} = \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right\} = \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n].
\end{aligned}
$$

**Svar:** Signalen är $x[n] = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n]$.