Lösningar till Kontrollskrivning 2019-10-21

Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	**b)**	**a)**	**a)**	**c)**	**b)**	**c)**	**b)**	**c)**	**b)**	**b)**	**c)**	**c)**	**b)**	**b)**	**c)**

1. Det måste finnas spår av en tvåa eller halva någonstans, på grund av kopplingen via Eulers formler, så alternativ c) och d) kan genast uteslutas. Alternativ a) kan inte heller vara rätt, eftersom det skulle betyda att de komplexa fourierkoefficienterna alltid är reella, vilket de ju inte behöver vara. Rätt svar måste alltså vara b).

   Svar: b)

2. Signalens medelvärde över en period ändras inte av tidsförskjutningen, så $\hat{D}_0 = D_0$. Detta utesluter alternativ c) och d). För att välja mellan a) och b) noterar vi att

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \implies x(t+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 (t+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n e^{jn\omega_0}}_{\hat{D}_n} e^{jn\omega_0 t}$$

   dvs alternativ a) stämmer. Det går även att se detta utifrån formeln för fourierkoefficienterna:

$$\hat{D}_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t+1)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \begin{bmatrix} \tau = t+1 \\ d\tau = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)e^{-jn\omega_0(\tau-1)}\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}\underbrace{e^{jn\omega_0}}_{\text{flytta ut}}\,d\tau = e^{jn\omega_0}\cdot \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}\,d\tau}_{=D_n} = D_n e^{jn\omega_0}.$$

   Svar: a)

3. Här är det lättast att helt enkelt räkna ut fourierkoefficienterna D_n. Som förberedelse för det listar vi ut att grundperiodtiden är $T_0 = 2\,\text{s}$ genom att se i figuren, och eftersom $\omega_0 T_0 = 2\pi$ måste $\omega_0 = \pi\,\text{rad/s}$. På intervallet $(-1,1)$ ges funktionen av uttrycket $\frac{\pi}{4}t$. Vi får alltså

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{\pi}{8}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t}\,dt.$$

   Om $n = 0$ blir integralen noll, så $D_0 = 0$, och om $n \neq 0$ blir den

$$D_n = \frac{\pi}{8}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t}\,dt = [\text{se formelbladet}] = \frac{\pi}{8}\left[\frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2}(-jn\pi t - 1)\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{e^{-jn\pi}}{-n^2\pi^2}(-jn\pi - 1) - \frac{e^{jn\pi}}{-n^2\pi^2}(jn\pi - 1)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{(-1)^n}{-n^2\pi^2}(-jn\pi - 1) - \frac{(-1)^n}{-n^2\pi^2}(jn\pi - 1)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{(-1)^n}{-n^2\pi^2}\big((-jn\pi - 1) - (jn\pi - 1)\big) = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cdot 2jn\pi = \frac{j(-1)^n}{4n}.$$

   Detta stämmer överens med alternativ a).

   Svar: a)

4. För $t > 0$ är $\delta(t) = 0$ (konstant), så det utesluter d). Dessuom måste dess derivata också vara noll för $t > 0$. Det utesluter a). Eftersom

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

är b) fel. Alltså gäller alternativ c).

Det går förstås också bra att direkt ge sig på c) och konstatera att integralen i c) är noll så länge $t < 0$, och att den blir ett så fort $t > 0$. Det stämmer med vänsterledet $u(t)$.

Svar: c)

5. Enligt formelbladet ger formeln för inversa fouriertransformen att

$$x(t+t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega(t+t_0)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)\, e^{j\omega t_0}}_{\tilde{X}(\omega)}\, e^{j\omega t}\, dt.$$

Rätt alternativ är alltså alternativ b).

Det går även att upptäcka det genom beräkningen

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+t_0) e^{-j\omega t}\, dt = \begin{bmatrix} \tau = t + t_0 \\ d\tau = dt \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau - t_0)}\, d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \underbrace{e^{j\omega t_0}}_{\text{flytta ut}}\, d\tau = e^{j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{X(\omega)} = e^{j\omega t_0} X(\omega).$$

Svar: b)

6. Här kan vi med fördel använda resultatet i förra uppgiften. Låt $\tilde{x}(t) = x(t-3) = e^{-2|t|}$, och beräkna

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t}\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}\, dt =$$
$$= \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_{0}^{-\infty} = [\text{gränsvärdena i } \pm\infty \text{ är noll}] =$$
$$= \frac{1}{2-j\omega} - \frac{1}{-(2+j\omega)} = \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} = \frac{4}{\omega^2+4}.$$

Nu gäller $\tilde{X}(\omega) = e^{j\omega(-3)} X(\omega) \iff X(\omega) = e^{3j\omega} \tilde{X}(\omega) = \dfrac{4e^{3j\omega}}{\omega^2+4}$, som är alternativ c).

Det går förstås även att direkt räkna motsvarande integral utan att trixa med tidsförskjutningen, men då blir det lite krångligare vid insättning av gränserna.

Svar: c)

7. Alternativ b) är korrekt. För en högersidig signal blir konvergensområdet av typen $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$, vilket betyder att inga singulära punkter kan finnas till höger om σ_0.

Svar: b)

8. Enkelsidiga laplacetransformen av en derivata fås som

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)\, e^{-st}\, dt = [f(t)\, e^{-st}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, s e^{-st}\, dt = \mathscr{L}\{f(t)\} - f(0^-).$$

Transformerar vi differentialekvationen får vi därför

$$\underbrace{sY(s) - y(0^-)}_{\text{från } y'(t)} + 2Y(s) = \underbrace{sX(s) - x(0^-)}_{\text{från } x'(t)} \iff (s+2)Y(s) = sX(s) - 6.$$

Rätt svar är alltså alternativ c).

Svar: c)

9. Nämnaren kan faktoriseras som $s^2 + 2s - 3 = (s+3)(s-1)$. Partialbråksuppdelning ger

$$X(s) = \frac{5s+7}{(s+3)(s-1)} = \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s-1},$$

så i inverstransformen kommer vi att ha en kombination av $2e^{-3t}$ och $3e^{t}$, där de olika delarna måste göras höger- eller vänstersidiga med hjälp av $u(t)$ eller $u_0(-t)$. På grund av konvergensområdesgränsen $\mathrm{Re}\{s\} > -3$ måste e^{-3t} vara *högersidig*, dvs multipliceras med $u(t)$, medan konvergensområdesgränsen $\mathrm{Re}\{s\} < 1$ medför att e^{t} måste vara *vänstersidig*, dvs stå tillsammans med $u_0(-t)$. Enda alternativet som uppfyller detta återfinns i b).

Svar: b)

10. Sambandet i b) är felaktigt, då

$$\mathscr{Z}\{\delta[n-2]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-2]\, z^{-n} = z^{-2}.$$

Det går även att utesluta de andra alternativen, eftersom de stämmer:

Signalen $u[n+1] - u[n-1]$ är ett för $n = -1$ och för $n = 0$, och noll för övrigt. Därför blir

$$\mathscr{Z}\{u[n+1] - u[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u[n+1] - u[n-1])\, z^{-n} = \sum_{n=-1}^{0} z^{-n} = z + 1,$$

dvs a) är korrekt. Sambandet i c) stämmer också, ty

$$\mathscr{Z}\{(-0.5)^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-0.5)^n u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-0.5)^n z^{-n} = [\text{se formelbladet}] =$$
$$= \frac{1}{1 - (-\frac{0.5}{z})} = \frac{z}{z + 0.5}$$

då $|z| > 0.5$. Likaså gäller d), eftersom

$$\mathscr{Z}\{u_0[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0[-n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n} = [\text{se formelbladet}] = \frac{z}{1-z}$$

då $|z| < 1$.

Svar: b)

11. Alternativ a) och d) måste vara fel, vilket vi ser direkt om vi sätter $\gamma = 1$. Genom att låta $x[n] = \delta[n]$ ser vi att även b) är fel. Alltså gäller alternativ c).

Ett annat sätt är att direkt bekräfta att c) stämmer:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \implies X\left[\frac{z}{\gamma}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n x[n]\, z^{-n} = \mathscr{Z}\{\gamma^n x[n]\}.$$

Svar: c)

12. Faktorisering av nämnaren ger singulära punkter (poler) i $z = -3$ och $z = 1$, vilket betyder att inversa laplacetransformen kommer att innehålla $1^n = 1$ och $(-3)^n$. Dessa måste göras höger- eller vänstersidiga med hjälp av $u[n]$ och $u_0[-n]$ — vilken det skall vara ser vi av konvergensområdesgränserna. På grund av konvergensområdesgränsen $|z| < |-3|$ skall $(-3)^n$ kombineras med $u_0[-n]$, och på grund av konvergensområdesgränsen $1 < |z|$ skall 1 kombineras med $u[n]$. Alternativen som passar in på detta är c) och d). För att välja rätt tecken för $(-3)^n u_0[-n]$ kan vi transformera $(-3)^n u_0[-n]$ och se om vi får samma tecken som som motsvarande del i partialbråksuppdelningen av $X[z]$:

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}\{(-3)^n u_0[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-3)^n u_0[-n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-3)^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{-n} z^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = [\text{se formelbladet}] = \frac{-\frac{z}{3}}{1-(-\frac{z}{3})} = -\frac{z}{z+3},\end{aligned}$$

och partialbråksuppdelningen av $X[z]$ blir

$$\frac{4z}{z^2+2z-3} = z \cdot \frac{4}{(z+3)(z-1)} = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right) = \frac{z}{z-1} \underbrace{-\frac{z}{z+3}}_{\text{delen från } (-3)^n}.$$

Eftersom $(-3)^n u_0[-n]$ gav rätt tecken skall vi välja c).

Alternativt går det att direkt inverstransformera $X[z]$ med hjälp av Partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}\frac{4z}{z^2+2z-3} &= z \cdot \frac{4}{(z+3)(z-1)} = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{\frac{z}{3}}{1+\frac{z}{3}} = \\ &= [\text{se formelbladet}] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{z}{3}\right)^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-3)^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(u[n] + (-3)^n u_0[-n]\big) z^{-n} = \\ &= \mathscr{Z}\big\{u[n] + (-3)^n u_0[-n]\big\}.\end{aligned}$$

Rätt svar är alltså alternativ c).

Svar: c)

13. Enhetscirkeln ligger i konvergensområdet för den angivna z-transformen $X[z]$, så fouriertransformen fås genom att sätta in $z = e^{j\Omega}$. Vi ser att $X[z]$ har två singulära punkter, vilka befinner sig i $z = \frac{1}{2} \pm \frac{j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j\pi/4}$, så närmaste punkten på enhetscirkeln har samma vinkel som en av dessa, $\Omega = \frac{\pi}{4}$ rad.

Svar: b)

14. Alternativ b) stämmer, enär

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \iff X[-\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j(-\Omega)(-n)} = \mathscr{F}\{x[-n]\}.$$

Det går även att, en i sänder, utesluta de andra alternativen:

$$x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]\, e^{j\Omega(n-n_0)}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{X[\Omega]\, e^{-j\Omega n_0}}_{\mathscr{F}\{x[n-n_0]\}} e^{j\Omega n}\, d\Omega,$$

så a) stämmer inte.

För reella signaler gäller $x^*[n] = x[n]$, och eftersom det finns reella signaler som inte har reell fouriertransform (t.ex. $\delta[n-1]$), så måste alternativ c) vara fel.

Om $x[n] = \delta[n]$ är $x[-n] = \delta[-n] = \delta[n]$, och vi ser att d) inte kan stämma.

Svar: b)

15. Termen $\pm 4^n u[n]$ inte är fouriertransformerbar, eftersom motsvarande geometriska serie är divergent (och därför inte absolutsummerbar). Vi kan därför utesluta alternativen a) och b).

Vi fouriertransformerar $x[n] = 0.25^n u[n] + \lambda \cdot 4^n u_0[-n]$, och får därvid

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(0.25^n u[n] + \lambda \cdot 4^n u_0[-n])e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n e^{-j\Omega n} + \lambda \sum_{n=-\infty}^{-1} 4^n e^{-j\Omega n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(0.25e^{-j\Omega})^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty}(4^{-1}e^{j\Omega})^n = [\text{se formelbladet}] = \\
&= \frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}} + \lambda \cdot \frac{4^{-1}e^{j\Omega}}{1-4^{-1}e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.25} + \lambda \cdot \frac{e^{j\Omega}}{4-e^{j\Omega}}.
\end{aligned}$$

För att det skall bli det önskade uttrycket krävs $\lambda = -1$, dvs det rätta alternativet är c).

Svar: c)