# LÖSNINGAR, TSDT18/84 Signaler & System 2022-08-23

**1** Systembeskrivning: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ $(\ast)$

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

$(\mathcal{L}_{II} \Rightarrow y(t) = y_{zs}(t))$

**$H(s)$ & $y_{zs}(t)$:** $\mathcal{L}_{II}\{(\ast)\} \overset{\text{Formels. Tab. 4:10}}{\Longrightarrow} (s^2+2s+1)Y_{zs}(s) = (s+1)X(s)$

LTI-system $\Rightarrow$ $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}$

Kausalt system, enligt uppgift, och pol i $s=-1$ $\Rightarrow$ Konv.omr. $Re\{s\} > -1$

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) = \Big/ x(t) = 3u(t) \overset{\text{Tab. 5.3}}{\Longleftrightarrow} X(s) = \frac{3}{s},\ Re\{s\}>0 \Big/ = \frac{3}{s}\cdot\frac{1}{s+1}$$

$$= /PBU/ = 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right),\quad Re\{s\}>0 \text{ resp. } Re\{s\}>-1$$

Formels. Tab. 5:3 & 5:11 $\Rightarrow$ $y_{zs}(t) = 3(u(t) - e^{-t}u(t))$

**$y_{zi}(t)$:** $\frac{d^2y_{zi}(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_{zi}(t)}{dt} + y_{zi}(t) = 0$ $(\bullet)$

$\mathcal{L}_{I}\{(\bullet)\}$ för $t \geq 0$ $\overset{\text{Tab. 4:10}}{\Longrightarrow}$

$$s^2 Y_{zi}(s) - s\cdot\underbrace{y_{zi}(0-)}_{=-1} - \underbrace{\frac{dy_{zi}(0-)}{dt}}_{=0} + 2(s\cdot Y_{zi}(s) - \underbrace{y_{zi}(0-)}_{=-1}) + Y_{zi}(s) = 0$$

$$\Rightarrow (s^2+2s+1)Y_{zi}(s) = -s-2 \Rightarrow$$

$$Y_{zi}(s) = -\frac{s+2}{s^2+2s+1} = -\frac{s+1+1}{(s+1)^2} = -\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$Re\{s\}>-1$ enl. ovan, samma som för $H(s)$

Tab. 15:11 & 15:12 $\Longrightarrow$ $y_{zi}(t) = -e^{-t}u(t) - t\cdot e^{-t}u(t)$

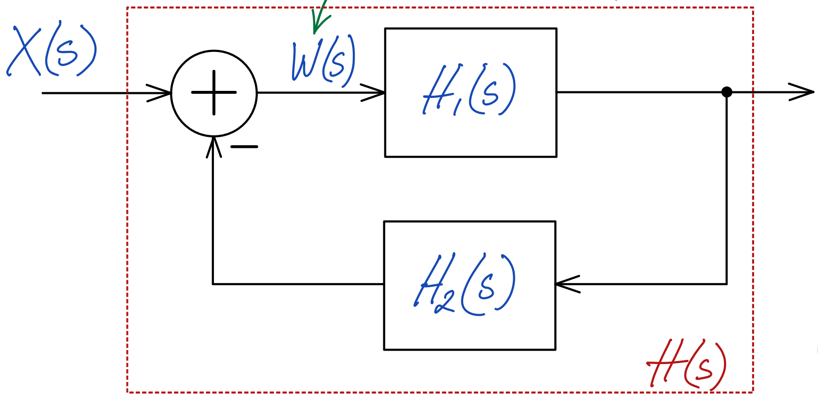
$$\Longrightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = (3-(4+t)e^{-t})u(t)$$

(Alternativt kan man utgå från $\mathcal{L}_I\{(\ast)\}$ och erhålla $y(t)$ direkt, utan att dela upp beräkningen i $y_{zs}(t)$ och $y_{zi}(t)$. $H(s)$ kan då erhållas från uttrycket för $Y(s)$, genom att identifiera $Y_{zs}(s) = X(s)\cdot H(s)$)

2

a)

Inför hjälpstorhet




$Y(s) = W(s)\cdot H_1(s)$

där

$W(s) = X(s) - Y(s)\cdot H_2(s)$

(Betrakta energifria system $\Rightarrow Y(s) = Y_{zs}(s)$)

$\Rightarrow Y(s)\left(1 + H_1(s)H_2(s)\right) = X(s)\cdot H_1(s)$ $\Rightarrow$ Det totala återkopplade systemets systemfunktion är $H(s) = \dfrac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \dfrac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$,

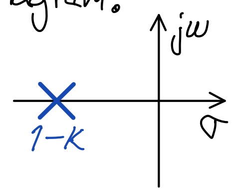
där $H_1(s) = \dfrac{1}{s-1}$, med $Re\{s\} > 1$, ty instabilt system enligt uppgift (jω-axeln ligger inte i konv.området), dvs. system $H_1$ är kausalt.

$H_2(s) = \mathcal{L}\{h_2(t)\} = \mathcal{L}_I\{K\cdot\delta(t)\} \overset{\text{Tab. 5:1}}{=} K$

($h_2(t<0) = 0$ $\Rightarrow$ även system $H_2$ är kausalt.)

$\Rightarrow H(s) = \dfrac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1}\cdot K} = \dfrac{1}{s-(1-K)}$

(Pol-nollställe-diagram:



)

Båda delsystemen är kausala $\Rightarrow$ det totala återkopplade systemet är kausalt

$\Rightarrow$ Konvergensområdet för $H(s)$ är $Re\{s\} > 1-K$

Systemet är stabilt om jω-axeln ligger i konvergensområdet, dvs. om $1-K<0$ $\Rightarrow$ $K>1$

b) För stabila LTI-system gäller $H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \dfrac{1}{K-1+j\omega}$

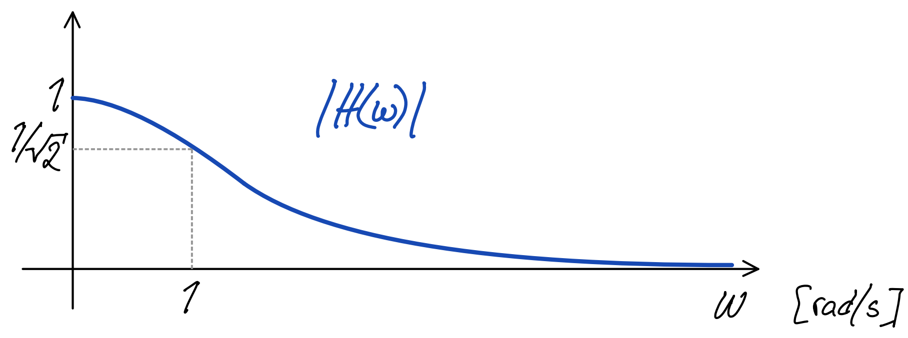
där, enligt a), $K>1$.

Den efterfrågade 3 dB-gränsvinkelfrekvensen erhålls enklast då $K=2 \Rightarrow H(\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega} \Rightarrow |H(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ (*)

- Det är uppenbart (även utgående från pol-nollställediagrammet för H(s)) att $|H(\omega)|_{max}$ erhålls vid $\omega = 0$ rad/s, dvs. $|H(\omega)|_{max} = |H(0)| \overset{(*)}{=} 1$

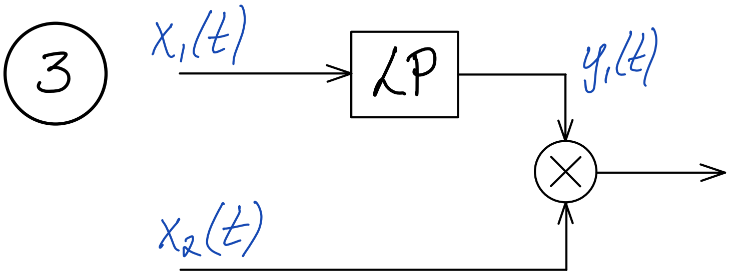
- $|H(\omega_{3dB})| = \begin{cases} \dfrac{|H(\omega)|_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega_{3dB}^2}} \end{cases} \Rightarrow \omega_{3dB} = 1$ rad/s

- (*) $\Rightarrow \lim\limits_{\omega \to \infty} |H(\omega)| = 0$ (Ges även av att antal poler hos H(s) (1 st) är större än antal nollställen (0 st).)

$\Longrightarrow$ 


(Det principiella utseendet för |H(ω)| erhålls även direkt från pol-nollställediagrammet för H(s) i a))

3




$|Y(\omega)|$ efterfrågas

$y(t) = x_2(t)\cdot y_1(t)$

$\Rightarrow \quad Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X_2 * Y_1\right)(\omega)$

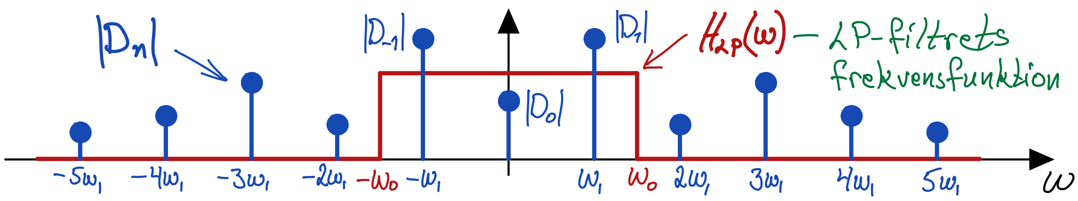
Det ideala LP-filtret släpper bara igenom frekvenskomponenter med vinkelfrekvens $\omega < \omega_0 = 80\pi$ rad/s.

Grundvinkelfrekvensen brukar betecknas $\omega_0$, men här är $\omega_0$ LP-filtrets gränsvinkelfrekvens.

$x_1(t)$ är periodisk med periodtiden $T_0 = \frac{2}{50}$ sek.

$\Rightarrow$ signalens grundvinkelfrekvens är $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_0} = 50\pi$ rad/s.

Det innebär att det bara är medelvärdet och grundtonen hos $x_1(t)$ som släpps igenom, dvs. $y_1(t) = C_0 + C_1\cdot\cos(\omega_1 t + \theta_1)$:




$D_n$ = de komplexa fourierseriekoefficienterna till insignalen $x_1(t)$.

- $C_0$ = medelvärdet $\overset{\text{Från figuren}}{=} \frac{8}{2} = 4$ $\quad$ (Allmänt: $C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_1(t)\,dt$ )
- $C_1 = 2|D_1|$ och $\theta_1 = \arg D_1$, där

$$D_1 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_1(t)e^{-j\omega_1 t}\,dt = \frac{50}{2}\int_0^{1/50} 8\cdot e^{-j50\pi t}\,dt = 200\left[\frac{e^{-j50\pi t}}{-j50\pi}\right]_0^{1/50}$$

($n=1$)

$$= \frac{4}{-j\pi}\left(\underbrace{e^{-j\pi}}_{=-1} - \underbrace{e^{0}}_{=1}\right) = \frac{8}{j\pi} = \frac{8}{\pi}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \begin{cases} |D_1| = \frac{8}{\pi} \\ \arg D_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = 4 + 2\cdot\frac{8}{\pi}\cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 4 + \frac{16}{\pi}\sin(50\pi t)$$

$$y(t) = x_2(t)\cdot y_1(t) = x_2(t)\cdot 4 + \underbrace{\frac{16}{\pi}\cdot x_2(t)\cdot \overbrace{\sin(50\pi t)}^{:=\,c(t)}}_{\text{(amplitudmodulering)}}$$

$$\Longrightarrow \underline{Y(\omega) = 4X_2(\omega) + \underbrace{\frac{16}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}}_{=\frac{8}{\pi^2}}(X_2 * C)(\omega)}$$

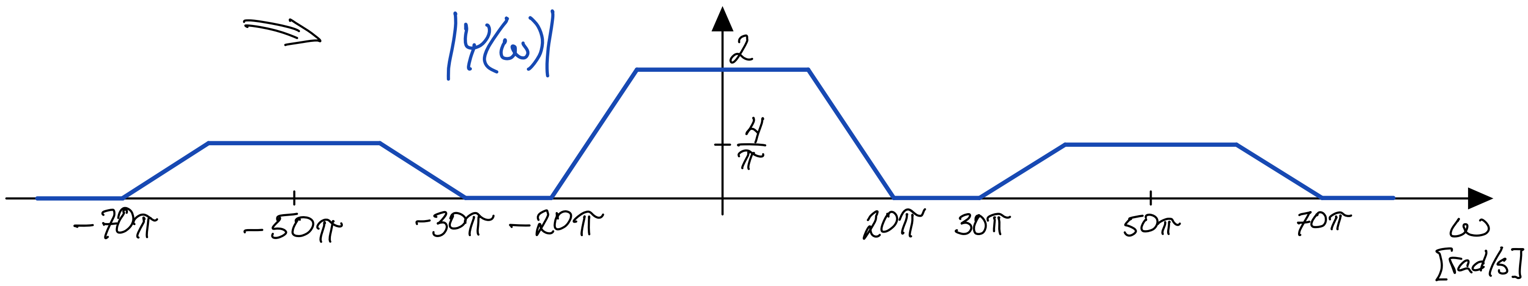
där $C(\omega) = \mathcal{F}\{\sin(50t)\} = \Big/ \begin{matrix}\text{Formels.}\\ \text{Tab. 3:22}\end{matrix} \Big/ = j\pi(\delta(\omega+50) - \delta(\omega-50))$

$$\Longrightarrow (X_2 * C)(\omega) = j\pi\left(X_2(\omega) * \delta(\omega+50\pi) - X_2(\omega) * \delta(\omega-50\pi)\right)$$

$$= j\pi\left(X_2(\omega+50\pi) - X_2(\omega-50\pi)\right)$$

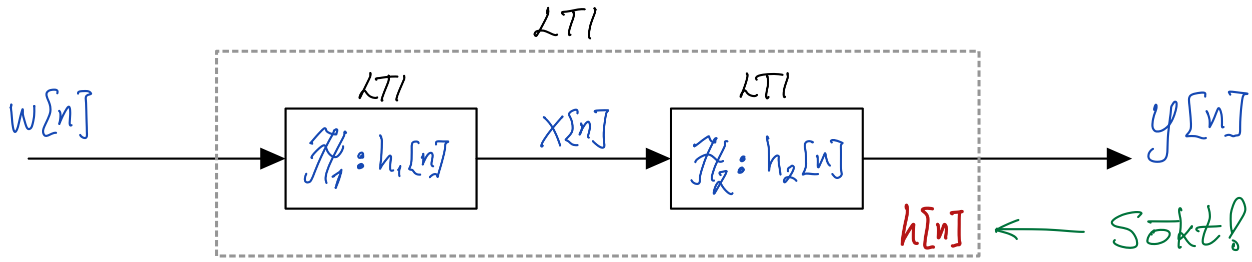
$$\Longrightarrow \underline{Y(\omega) = 4X_2(\omega) + \frac{j8}{\pi}\left(X_2(\omega+50\pi) - X_2(\omega-50\pi)\right)}$$

$\Longrightarrow$ $|Y(\omega)|$



④

a)




Utgå från <u>energifria</u> (LTI-) system ⟹

$$y[n] = (x * h_2)[n] = ((w * h_1) * h_2)[n] = (w * (h_1 * h_2))[n] = (w * h)[n]$$

$$\Longrightarrow \quad h[n] = (h_1 * h_2)[n]$$

- System $\mathcal{H}_1$: $H_1[\Omega] = \dfrac{1}{e^{j\Omega} - 0{,}5} = \dfrac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0{,}5} \cdot e^{-j\Omega}$

  Formels. Tab. 7:6 & Tab. 8:5 ⟹ $h_1[n] = 0{,}5^{n-1} \cdot u[n-1]$

- System $\mathcal{H}_2$: $\mathcal{Z}_{II}\{y[n] - 0{,}8\,y[n-1]\} = \mathcal{Z}_{II}\{x[n-1]\}$

  Formels. Tab. 9:5 ⟹ $(1 - 0{,}8\,z^{-1})\,Y[z] = z^{-1} X[z]$

  $\Longrightarrow \quad H_2[z] = \dfrac{Y_{zs}[z]}{X[z]} = \Big/ \begin{array}{l}\text{Energifritt}\\ \Rightarrow Y[z] = Y_{zs}[n]\end{array} \Big/ = \dfrac{z^{-1}}{1 - 0{,}8\,z^{-1}} = \dfrac{1}{z - 0{,}8}$

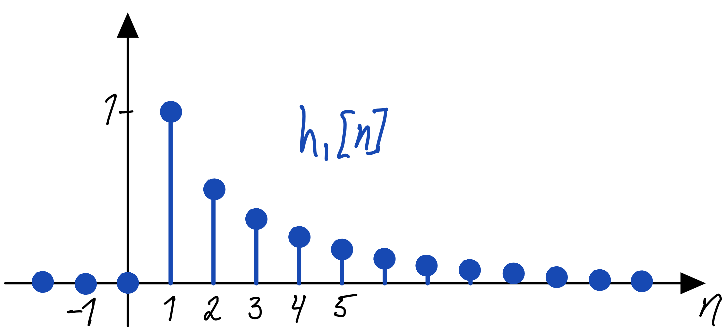
  Här behöver vi <u>anta</u> att konvergensområdet är $|z| > 0{,}8$, vilket ger ett kausalt & stabilt system. Om $|z| < 0{,}8$ erhålls ett icke-kausalt & instabilt system, vilket inte har en praktisk relevans.

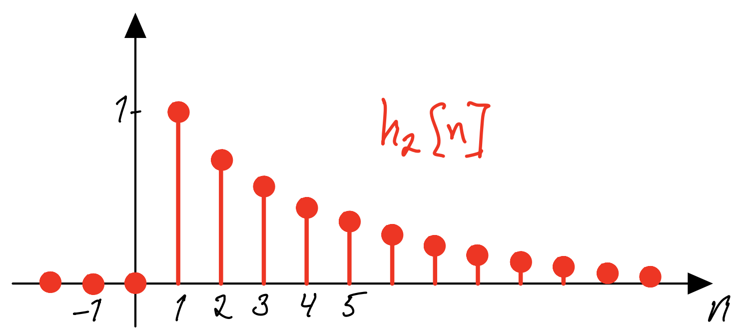
  Tab. 10:5 ger då $h_2[n] = 0{,}8^{n-1} \cdot u[n-1]$

Anm: Poäng för ovanstående ges i både a) och b)!

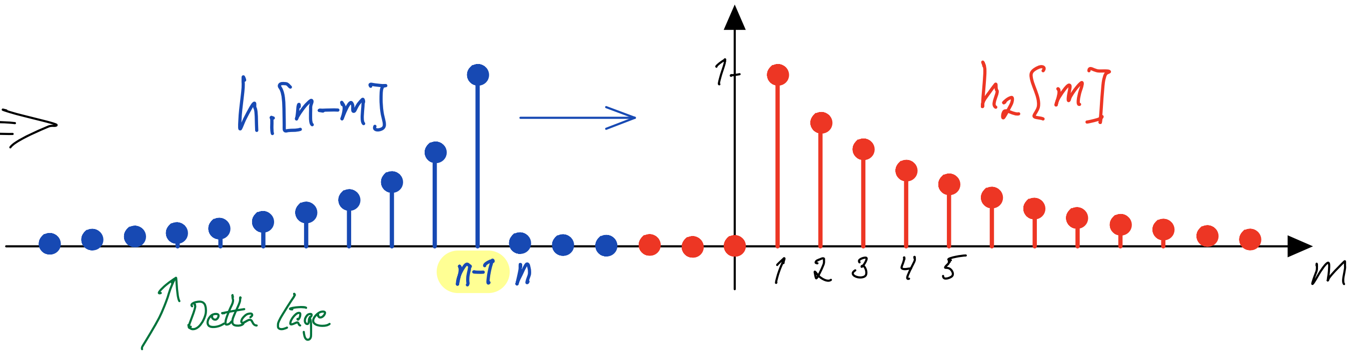
Utsignalsberäkning i tidsdomänen ⟺ Faltning:

$$h[n] = (h_1 * h_2)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[n-m]\, h_2[m]$$



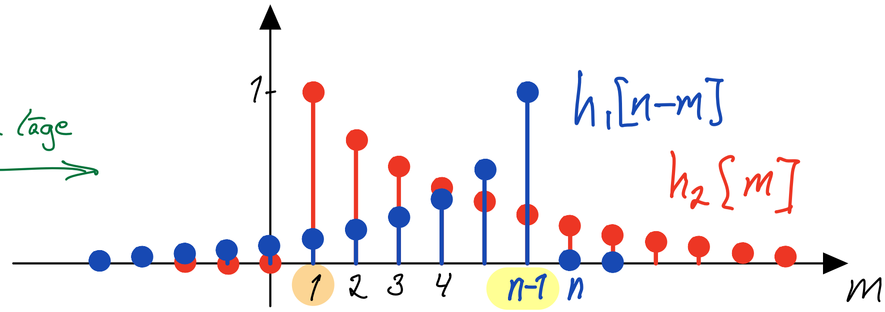
$\Rightarrow$




• $n-1<1$ dvs. $\underline{n<2}$ $\Rightarrow$ $h_1[n-m]h_2[m]=0$ $\Rightarrow$ $\underline{h[n]=0}$

• $n-1\geq 1$, dvs. $\underline{n\geq 2}$

Detta läge




$\boxed{h_1[n-m]h_2[m]\neq 0 \text{ för } 1\leq m\leq n-1}$

$$\Rightarrow \underline{h[n]} = \sum_{m=1}^{n-1} 0{,}5^{n-m-1}\cdot 0{,}8^{m-1} = \frac{5}{2}0{,}5^n\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{8}{5}\right)^m$$

$$= \frac{5}{2}0{,}5^n\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^1\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{8}{5}} = \underline{\frac{20}{3}0{,}5^n\left(\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}-1\right)}$$

Dvs. $$\underline{h[n] = \frac{20}{3}0{,}5^n\left(\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}-1\right)u[n-2] = \left(\frac{25}{6}0{,}8^n-\frac{20}{3}0{,}5^n\right)u[n-2]}$$

b) Från a): $h[n]=(h_1*h_2)[n] \iff \underline{H[z]=H_1[z]\cdot H_2[z]}$, där

• $H_1[z]=\mathcal{Z}\{h_1[n]\}=\mathcal{Z}\{0{,}5^{n-1}\cdot u[n-1]\} \overset{\text{Tab. 10:5}}{=} \frac{1}{z-0{,}5}$, $|z|>0{,}5$

• $H_2[z]=\frac{1}{z-0{,}8}$, $|z|>0{,}8$, beräknas i a)

$$\Rightarrow H[z] = \frac{1}{z-0{,}5}\cdot\frac{1}{z-0{,}8} = /\text{P.B.U.}/ = -\frac{10}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-0{,}5}}_{|z|>0{,}5}+\frac{10}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-0{,}8}}_{|z|>0{,}8}$$

Formels. Tab. 10:5 $\Rightarrow$

$$\underline{h[n] = -\frac{10}{3}0{,}5^{n-1}u[n-1]+\frac{10}{3}0{,}8^{n-1}u[n-1] = \left(\frac{25}{6}0{,}8^n-\frac{20}{3}0{,}5^n\right)u[n-1]}$$

"$(\cdots)\cdot u[n-2]$ vid faltningen i a). Dock samma svar då $h[1]=\left(\frac{25}{6}\cdot 0{,}8-\frac{20}{3}\cdot 0{,}5\right)\cdot u[0]=0$

## 5

a) $H[z] = \dfrac{z^2-2}{(z-A)(z^2+z+3/4)} = \dfrac{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})}{(z-A)\left((z+\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\right)}$

$\Rightarrow$ Två nollställen i $z=\pm\sqrt{2}$ och tre poler i $z=A$ och $z=-\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Kausalt LTI-system $\Rightarrow$ Konvergensområdet för $H[z]$ är $|z|>R_0$, där $R_0$ är avståndet från origo till den yttersta polen i z-planet.
Stabilt LTI-system om enhetscirkeln ligger i konvergensområdet $\Rightarrow R_0<1$, dvs. alla polerna ligger innanför enhetscirkeln.

- $\left|\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Rightarrow$ Det komplexkonjugerade polparet är innanför $|z|=1$.
- Enkelpolen i $z=A$ är innanför $|z|<1$ om $|A|<1 \Leftrightarrow$ Stabilt system.
- Även stabilt system om $A=\pm\sqrt{2}$, för då kancelleras polen av ett nollställe.

b) $x[n] = \cos(\pi n+0{,}2)$. $A=\sqrt{2} \Rightarrow$ Stabilt system enligt a) ovan

$\Rightarrow y[n] = |H[\pi]|\cdot\cos(\pi n+0{,}2+\arg H[\pi])$, där

$$H[\Omega=\pi] = H[z=-1] = \left.\frac{z+\sqrt{2}}{z^2+z+3/4}\right|_{z=-1} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \approx 0{,}55 = \underbrace{0{,}55}_{|H[\pi]|}\cdot e^{j\overset{\arg H[\pi]}{0}}$$

$\Rightarrow y[n] \approx 0{,}55\cdot\cos(\pi n+0{,}2)$

Energifritt system betraktas $\Rightarrow Y[z] = Y_{zs}[z]$

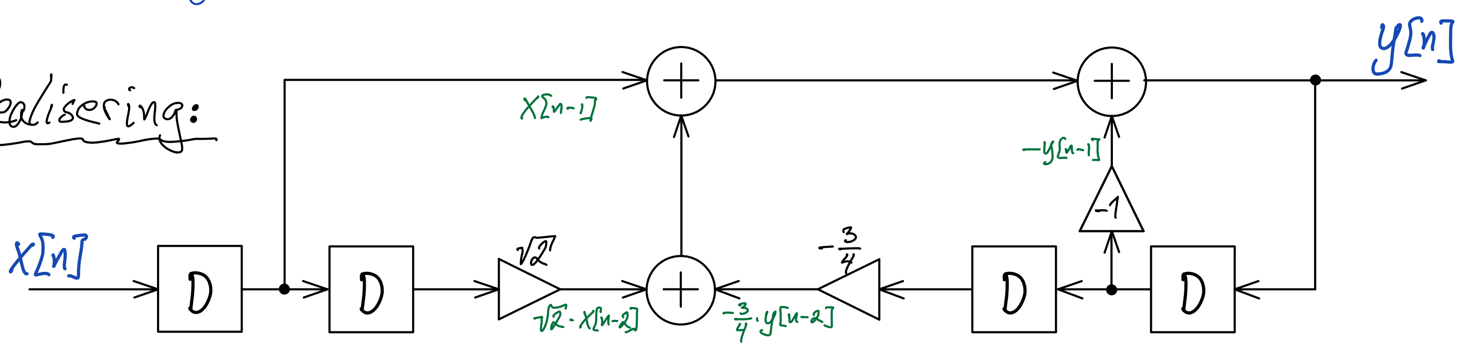
c) $A=\sqrt{2} \Rightarrow H[z] = \dfrac{z+\sqrt{2}}{z^2+z+3/4} = \dfrac{z^{-1}+\sqrt{2}z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}} = \dfrac{Y[z]}{X[z]}$

$\Rightarrow Y[z]+z^{-1}Y[z]+\frac{3}{4}z^{-2}Y[z] = z^{-1}X[z]+\sqrt{2}\cdot z^{-2}X[z]$

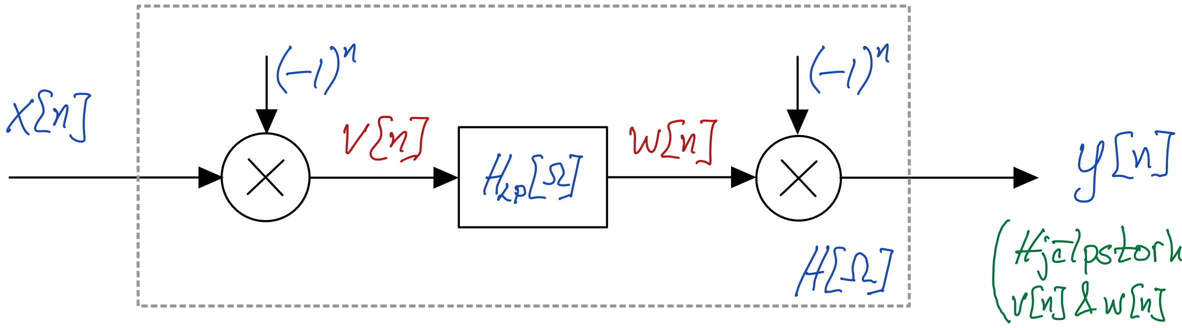
Formels. Tab. 9:4 $\Rightarrow y[n]+y[n-1]+\frac{3}{4}y[n-2] = x[n-1]+\sqrt{2}x[n-2]$

$\Rightarrow y[n] = x[n-1]+\sqrt{2}x[n-2]-y[n-1]-\frac{3}{4}y[n-2]$

Realisering:



6




(Hjälpstorheterna $v[n]$ & $w[n]$ införda.)

a) $y[n] = (-1)^n w[n] \xRightarrow{\text{Formels. Tab. 7:7}} Y[\Omega] = W[\Omega - \pi]$

där $W[\Omega] = W_{zs}[\Omega] \overset{\text{LTI-system}}{=} V[\Omega] \cdot H_{LP}[\Omega]$, där (Tab. 7:7) $V[\Omega] = X[\Omega - \pi]$

Betrakta energifritt system

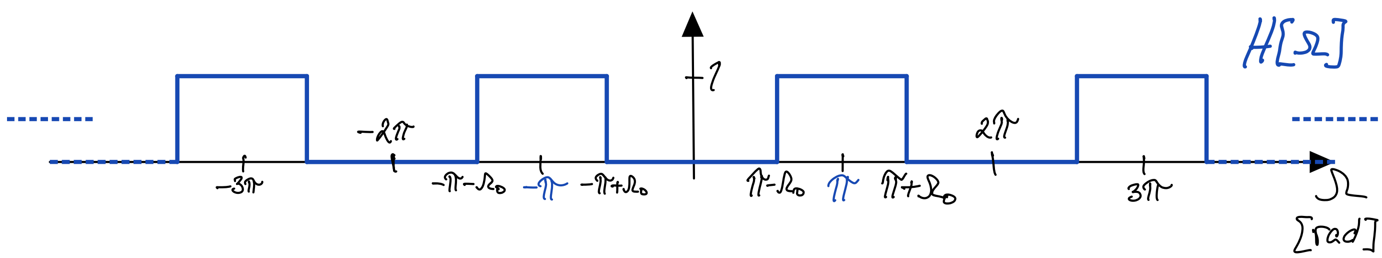
$$\Rightarrow \quad Y[\Omega] = V[\Omega - \pi] \cdot H_{LP}[\Omega - \pi] = X[\underbrace{(\Omega - \pi) - \pi}_{= \Omega - 2\pi}] \cdot H_{LP}[\Omega - \pi]$$

$$= \big/ X[\Omega] \text{ är } 2\pi\text{-periodisk} \big/ = X[\Omega] \cdot H_{LP}[\Omega - \pi] \quad (1)$$

Det totala systemet är ett (energifritt) LTI-system

$$\Rightarrow \quad Y[\Omega] = Y_{zs}[\Omega] = X[\Omega] \cdot H[\Omega] \quad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \quad \Rightarrow \quad H[\Omega] = H_{LP}[\Omega - \pi]$$




b) Filtret dämpar helt frekvenssignaler med normerad vinkelfrekvens $\Omega < \pi - \Omega_0$, dvs. lågfrekventa signaler, och släpper igenom frekvenssignaler med normerad vinkelfrekvens $\pi - \Omega_0 < \Omega < \pi$ rad, dvs. högfrekventa signaler.

Det totala systemet utgör därför ett (idealt) högpassfilter.

(Det intressanta (fysikaliska) normerade vinkelfrekvensintervallet är $0 \leq \Omega \leq \pi$ rad.)