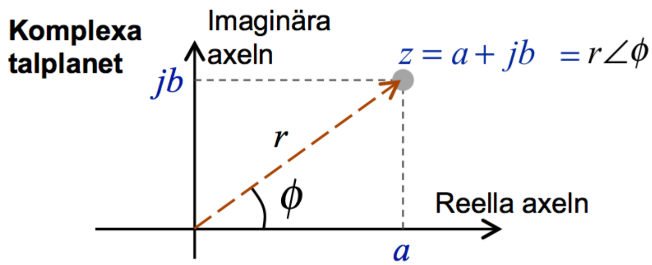
Repetition – Komplexa Tal

Låt $z = a + jb = r \cdot e^{j\phi} \in \mathbb{C}$, där j är den imaginära enheten och definieras av sambandet $j^2 = -1$.



- $z = a + jb$ är z skrivet på *rektangulär* (eller kartesisk) *form*, där $\begin{cases} a = \mathrm{Re}\{z\} = r \cdot \cos(\phi) \\ b = \mathrm{Im}\{z\} = r \cdot \sin(\phi) \end{cases}$.
- $z = r \cdot e^{j\phi}$ är z skrivet på *polär form*, där $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \arg z = \arctan \dfrac{b}{a} \left(\begin{matrix} \pm\pi \\ \text{om } a < 0 \end{matrix} \right) \end{cases}$

  (I en del litteratur anges $z = r(\cos\phi + j\sin\phi)$ som polär form, vilket är *olämpligt*!

  Detta är snarare den rektangulära formen uttryckt med polära *koordinater*!)
- Det är vanligt – och ofta lämpligt – att ta hjälp av 2-dimensionella vektorer för att beskriva och hantera komplexa tal och komplexvärd aritmetik. Med en vektorrepresentation av komplexa tal, så blir t.ex. en addition av två komplexa tal ekvivalent med en vektoraddition.

Samband och räkneregler:

- **Eulers formel:** $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi \ \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = \dfrac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \mathrm{Re}\{e^{j\phi}\} \\ \sin\phi = \dfrac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \mathrm{Im}\{e^{j\phi}\} \end{cases}$

- **Grundläggande samband (*k* är heltal):**
  - $j = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$
  - $e^{\pm jk2\pi} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$, dvs. $e^{j0} = 1, \ \ e^{\pm j2\pi} = 1$ osv. $\quad \left[\cos(k2\pi) = e^{jk2\pi}\right]$
  - $e^{\pm jk\pi} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = (-1)^k = \begin{cases} 1; & \text{jämna } k \\ -1; & \text{udda } k \end{cases}$. $\quad \left[\cos(k\pi) = e^{jk\pi}\right]$

  Ett vackert specialfall av detta samband är *Eulers identitet*, som innehåller de fem mest centrala konstanterna inom matematiken (e, j, π, 1 och 0): $e^{j\pi} + 1 = 0$

- **Komplexkonjugat:** $z^* = a - jb = r \cdot e^{-j\phi}$, dvs. z^* är ekvivalent med en spegling av z i den reella axeln. z^* erhålls genom att i z byta j mot $-j$ (gäller både rektangulär och polär form). Komplexkonjugat betecknas $\overline{z}$ i en del litteratur.

- **Kvadratiskt belopp:** $z \cdot z^* = |z|^2$

- **Aritmetik** $\left(z_1 = a + jb = r_1 \cdot e^{j\phi_1}, \quad z_2 = c + jd = r_2 \cdot e^{j\phi_2}, \quad z = \alpha + j\beta = r \cdot e^{j\phi} \right)$**:**
  - Vid addition och subtraktion av komplexa tal används *rektangulär representation*:
    - **Addition:** $z = z_1 + z_2 = (a + jb) + (c + jd) = a + c + j(b + d)$
    - **Subtraktion:** $z = z_1 - z_2 = (a + jb) - (c + jd) = a - c + j(b - d)$
  - Vid övrig aritmetik, dvs. multiplikation, division, potensberäkning m.fl., används lämpligen *polär representation*:
    - **Multiplikation:** $z = z_1 \cdot z_2 = (a + jb)(c + jd) = r_1 e^{j\phi_1} \cdot r_2 e^{j\phi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$

      Specialfall: $j \cdot z = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \left(r \cdot e^{j\phi} \right) = r \cdot e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}$ (dvs. rotation moturs $\frac{\pi}{2}$ rad)
    - **Division:** $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{r_1 \cdot e^{j\phi_1}}{r_2 \cdot e^{j\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$. Specialfall: $\frac{z}{j} = \frac{r \cdot e^{j\phi}}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = r \cdot e^{j\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)}$

      Använd *inte* sambandet $z = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \cdots$ som du antagligen fått lära dig tidigare. Den beräkningsgången ger vanligen krångligare beräkningar samt att du vid ingenjörsmässiga beräkningar oftast är i behov av den polära representationen. Den erhålls enklast vid division genom att skriva om täljare och nämnare på polär form.
    - **Potenser:** $z = z_1^n = (a + jb)^n = \left(r_1 \cdot e^{j\phi_1} \right)^n = r_1^n \cdot e^{jn\phi_1}$

- **Rötter till $z^n - c = 0$** (n är heltal)**:**
  De n rötterna ligger i det komplexa talplanet, jämnt fördelade på en cirkel med radien r och med vinkelavståndet $\frac{2\pi}{n}$ mellan intilliggande rötter. Alla lösningar till $z^n = c = r_0 \cdot e^{j\phi_0} = r_0 \cdot e^{j(\phi_0 + k \cdot 2\pi)}$ erhålls genom att man i ekvationen ansätter $z = r \cdot e^{j\phi_k}$ och sedan löser ut r och ϕ_k som

  $$\begin{cases} r = \sqrt[n]{r_0} \\ \phi_k = \dfrac{\phi_0}{n} + k \cdot \dfrac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \qquad \left(\text{justera lämpligen vinklarna så att } -\pi < \phi_k \le \pi \right) \end{cases}$$

- **Komplex amplitud** (*eng: phasor*)**:** I den komplexa exponentialfunktionen $\tilde{x}(t) = X \cdot e^{j\omega_0 t}$ kallas $X = A \cdot e^{j\varphi}$ den *komplexa amplituden* till $e^{j\omega_0 t}$. Från $\tilde{x}(t)$ kan tidsberoende cosinus- och sinussignaler erhållas som

  $$\begin{cases} x_{\cos}(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{x}(t)\} = A \cdot \mathrm{Re}\left\{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right\} = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ x_{\sin}(t) = \mathrm{Im}\{\tilde{x}(t)\} = A \cdot \mathrm{Im}\left\{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right\} = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}.$$