

Signaler & System – Föreläsning 8: Videosammanfattning

Under resten av kursen kommer vi att fokusera på tidsdiskreta signaler och system

Du har redan inledningsvis stött på tidsdiskreta signaler i samband med avsnittet om sampling och rekonstruktion, men nu ska vi allmänt undersöka egenskaper hos både signaler och system – i såväl tidsdomänen som i transformdomänen – samt bland annat beräkna utsignalen från tidsdiskreta LTI-system i båda dessa domäner.

Du kommer att känna igen mycket från motsvarande egenskaper och beräkningar för tidskontinuerliga signaler och system.

Du förbereder dig inför föreläsningen genom att titta på nedanstående fyra videor om:

- 1) Tidsdiskreta signaltyper
- 2) Tidsdiskreta signaloperationer
- 3) Tidsdiskreta signalmodeller
- 4) Egenskaper hos tidsdiskreta system

Tidsdiskreta signaltyper

TIDSDISKRETA SIGNALTYPER

Energisignaler
har ändlig signalenergi E_x
 $0 < E_x < \infty, P_x = 0$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$
$$\int_{T_0}^{T_0+T} E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Effektssignaler
har ändlig signaleffekt P_x
 $0 < P_x < \infty, E_x = \infty$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$
$$\int_{T_0}^{T_0+T} P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Om $x[n]$ är N_0 -periodisk:
$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=N_0}^{N_0+N_0-1} |x[n]|^2 \quad \int_{T_0}^{T_0+T} P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^{T_0+T} |x(t)|^2 dt$$

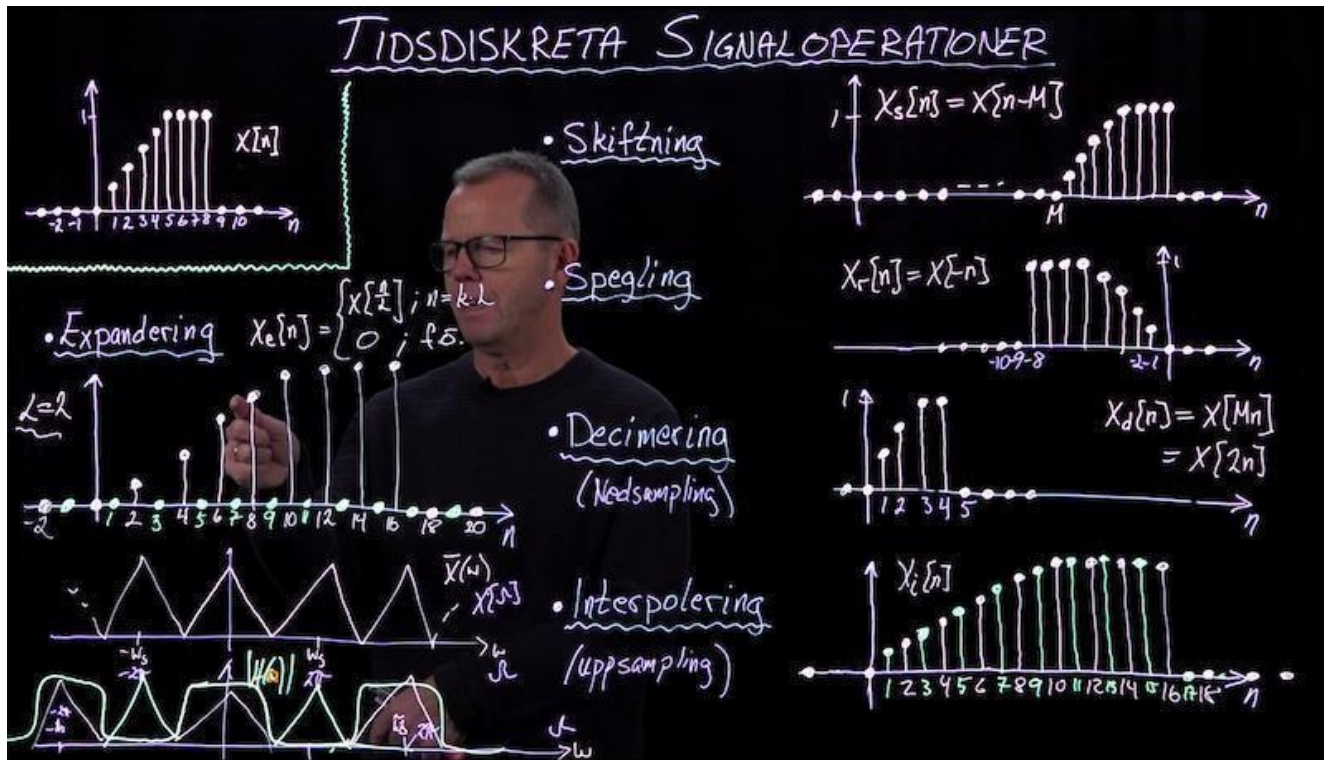
Likformig sampling: $x[n] = x(nT)$

Kausal signal: $x[n] = 0; n < 0$
Antikausal signal: $x[n] = 0; n \geq 0$

Definition av några centrala tidsdiskreta signaltyper, signalklassificeringar:

- * Tidsdiskret signal erhållen genom likformig sampling (från 0:00)
- * Energisignaler och signalenergi (från 1:36)
- * Effektssignaler och signaleffekt (från 3:02)
- * Kausal signal (från 6:25)

Tidsdiskreta signaloperationer



Här definieras och ges exempel på några av de viktigaste signaloperationerna på tidsdiskreta signaler:

- * Skiftning, $x[n-M]$ (från 0:00)
- * Spegling, $x[-n]$ (från 1:46)
- * Decimering (nedsampling), $x[Mn]$ (från 2:23)
- * Interpolering (uppsampling) (från 4:43)
- * Expanding, $x[n/L]$ (från 6:17)
 - * Tolkning i frekvensdomänen:
Interpolering = Expanding + LP-filtrer (från 8:13)

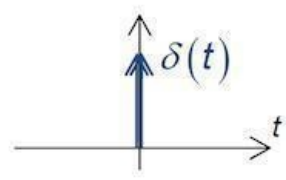
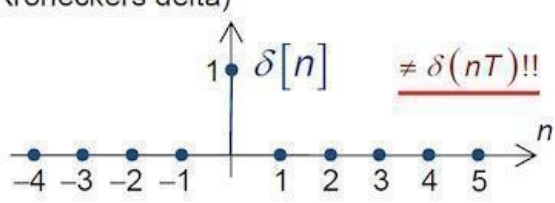
Decimering, interpolering och expanding handlar om hur man tidsskalar $x[n]$, genom att antingen trycka ihop den (decimering) eller dra ut den (interpolering/expanding). Här gäller motsvarande egenskaper som du känner till för tidskontinuerliga signaler – om man drar ut en tidssignal med en faktor M , så trycks spektrumet i frekvensdomänen ihop med samma faktor, och tvärtom.

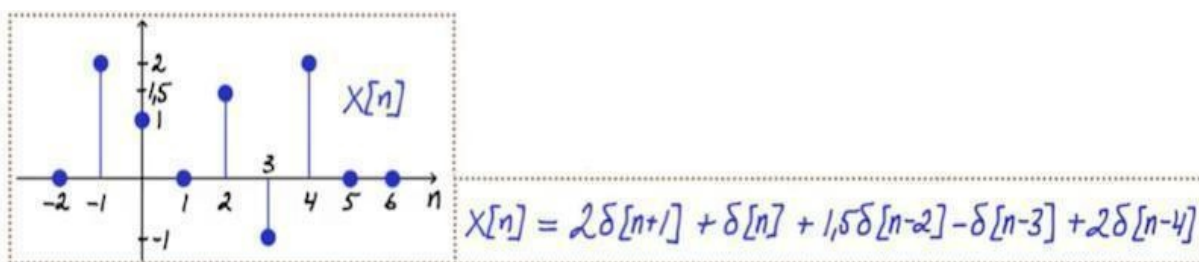
När det gäller den sista delen, från 8:13, när jag pratar om hur vad som händer i frekvensdomänen vid interpolation – dvs. expansion följt av LP-filtrering – så blir effekten för spektrumet i frekvensdomänen lättare att förstå om ett par föreläsningar. Du behöver därför inte ta någon längre tid för detta nu, om du inte riktigt hänger med på resonemanget i videon. Dock – för den intresserade – så här ser relationerna ut mellan tidsdomänen och frekvensdomänen (från Kapitel 9.2 i formelsamlingen):

11. Decimering	$x[nN]$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X \left[\frac{\Omega - k2\pi}{N} \right]$
12. Expansion (nollinskjutning, $L-1$ nollor mellan varje $x[n]$ -värde)	$x_e[n] = x_{(L)}[n] = \begin{cases} x \left[\frac{n}{L} \right]; & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0; & \text{f.ö.} \end{cases}$	$X[L\Omega]$

Tidsdiskreta signalmodeller

Del 1

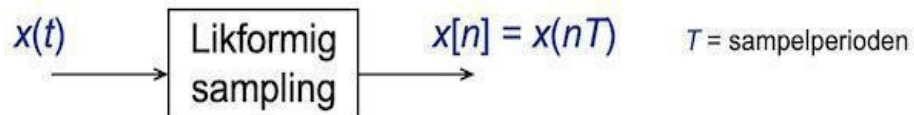
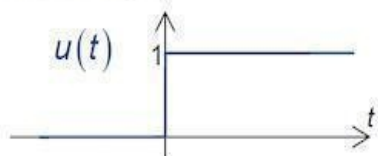
Tidskontinuerligt	Tidsdiskret
$x(t)$	$x[n]$
<u>Diracimpulsen</u> (enhetsimpulsen)	<u>Enhetsimpulssekvensen</u> (Kroneckers delta)
	
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$



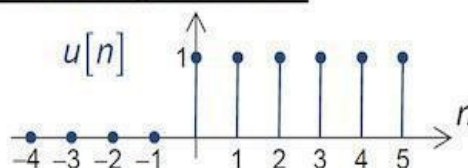
I den här videon beskrivs de vanligaste tidsdiskreta signalmodellerna:

- * Enhetsimpulsen (enhetsimpulssekvensen) $\delta[n]$ (0:00)
- * Enhetsstegsekvensen $u[n]$ (3:51)
- * Reella exponentialekvensen γ^n (5:02)
- * Komplexa exponentialekvensen $e^{j\Omega_0 n}$ (8:17)
 - * Cosinussekvensen $\cos(\Omega_0 n)$ och sinussekvensen $\sin(\Omega_0 n)$ (9:50)
 - * Villkor för frekvenssignalers periodicitet (10:57)
 - * Den högsta praktiska normerade vinkelfrekvensen är π rad (13:08)
 - * Alternerande enhetssekvensen $(-1)^n$ (14:44)

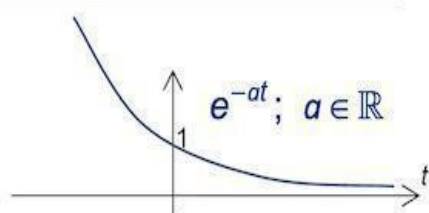
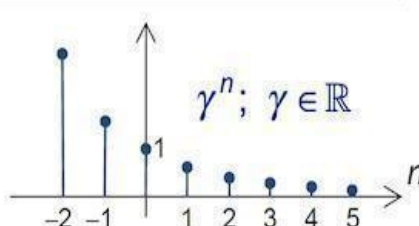
Inledningsvis – i skärmdumpen ovan – definieras enhetsimpulsen.
Övriga signalmodeller följer nedan.

Enhetssteget

$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Enhetsstegsekvensen

$$u[n] = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

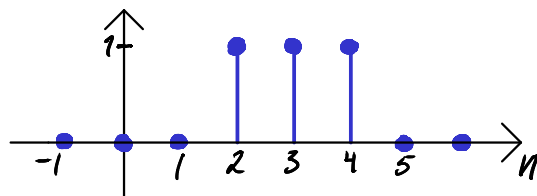
Reella exponentialfunktionerReella exponentialekvenser

- * Enhetsstegsekvensen $u[n]$ (3:51)
- * Reella exponentialekvensen γ^n (5:02)

Tips: Det är ofta bättre att uttrycka tidsdiskreta signaler som är nollskilda vid få n -värden som funktion av enhetsimpulsen.

Faltningsberäkningar, transformer med mera blir ofta lättare då.

Exempel:



$$\begin{aligned} x[n] &= u[n-2] - u[n-5] \\ &= \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \end{aligned}$$

Notera relationen mellan de tidsdiskreta $u[n]$ och $\delta[n]$ –

den är av samma karaktär som relationen mellan de tidskontinuerliga $u(t)$ och $\delta(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad \Leftrightarrow \quad \delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad \left(= \frac{u[n] - u[n-1]}{1} \right)$$

Komplexa exponentialfunktionen

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Periodtid: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

(Förväxla inte T_0 med
sampelperioden T)

Komplexa exponentialekvansen

$$e^{j\omega_0 n T} = |\Omega = \omega T| = e^{j\Omega_0 n} \\ = \cos(\Omega_0 n) + j \sin(\Omega_0 n)$$

Cosinus-
sekvansen

Sinus-
sekvansen

Ω : **Normerad vinkelfrekvens [rad]**

Om $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$ är N -periodisk
 $\Rightarrow x[n+N] = x[n]$ dvs.
 $\cos(\Omega_0(n+N)) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N) = \cos(\Omega_0 n)$
 $\Rightarrow \underline{\Omega_0 N = k \cdot 2\pi}$

Dvs. om $\frac{2\pi}{\Omega_0} \in \mathbb{Q}$ ($\frac{N}{k}$) \Rightarrow

$\cos(\Omega_0 n)$ (& $\sin(\Omega_0 n)$ & $e^{j\Omega_0 n}$) har period

$$N = k \cdot \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{ för något } k \in \mathbb{N}$$

$$\cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n + m \cdot 2\pi) = \cos(\Omega_0 n + m \cdot 2\pi)$$

* Den största praktiska normerade
vinkelfrekvensen Ω är $\underline{\pi \text{ rad}}$

$$e^{j\Omega_0 n} \Big|_{\Omega_0 = \pi} = \begin{cases} \cos(\pi n) + j \sin(\pi n) = \cos(\pi n) \\ e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = \underline{(-1)^n} \end{cases}$$

- * Komplexa exponentialekvansen $e^{j\Omega_0 n}$ (8:17)
- * Cosinussekvansen $\cos(\Omega_0 n)$ och sinussekvansen $\sin(\Omega_0 n)$ (9:50)
- * Villkor för frekvenssignalers periodicitet (10:57)
- * Den högsta praktiska normerade vinkelfrekvensen är π rad (13:08)
- * Alternerande enhetssekvansen $(-1)^n$ (14:44)

Redan för några föreläsningar sedan, i samband med sampling och rekonstruktion, så träffade vi på den normerade vinkelfrekvensen $\Omega = \omega T$.

Jag sade då att man vid frekvensanalys av tidsdiskreta signaler och system hellre uttrycker spektrumet som funktion av Ω i stället för ω .

Detta eftersom det inte alltid är så att $x[n]$ uppkommit från en sampling.

Från och med nu, så är det därför Ω som används som (normerad) vinkelfrekvensvariabel för tidsdiskreta signaler och system. Kursboken använder sällan normerad frekvens, men det gör vi däremot i kursen:

$\Omega = 2\pi\theta$, där θ är den (dimensionslösa) normerade frekvensen.

Egenskaper hos tidsdiskreta system

EGENSKAPER, TIDSDISKRETA SYSTEM

$X[n]$ $\xrightarrow{X_m[n]}$ Energifritt; \mathcal{L} \rightarrow $Y[n] = Y_{zs}[n] = \mathcal{L}\{X[n]\}$
 $Y_m[n] = \mathcal{L}\{X_m[n]\}$

• Linjäritet: $X[n] = a \cdot X_1[n] + b \cdot X_2[n] \xrightarrow{\text{linjärt system}} Y[n] = a \cdot Y_1[n] + b \cdot Y_2[n]$

• Tidsinvarians: Om $X[n] \rightarrow Y[n]$ $\xrightarrow{\text{Tidsinvariant system}} \hat{X}[n] = X[n-N] \rightarrow \hat{Y}[n] = Y[n-N]$

• Kausalitet: Systemet är kausalt om $y[m]$ bara beror på $x[n \leq m]$

• Stabilitet: Systemet är (insignal-utsignal-)stabil (externt stabil) om det, för varje begränsad insignal ($|x[n]| \leq N < \infty \forall n$), genererar en begränsad utsignal ($|y[m]| \leq M < \infty \forall n$) ($N, M \in \mathbb{R}$)

Definition av de viktigaste egenskaperna hos tidsdiskreta system:

- * Inledning (0:00)
- * Linjäritet (0:45)
- * Tidsinvarians (2:08)
- * Kausalitet (3:28)
- * Stabilitet (4:43)

Som du märker, när du ser på videon, så är dessa systemegenskaper i grunden samma som för tidskontinuerliga system. Inget revolutionerande nytt, alltså, men vi behöver formulera och använda dessa definitioner även för tidsdiskreta system.